Obsah

0. Úvod

0.1. Než začneme s výpočtem

0.1.1.

• **Výpočet v buňce** - spouští se pomocí kombinace kláves SHIFT+ENTER (popřípadě klávesy ENTER na numerické klávesnici).
• Pro zadání informací k výpočtu použijeme buňku označenou **In[n]:=** (vstupní buňka) a vypočtený výsledek se zobrazí v buňce **Out[n]=**. Podívejme se na jednoduchý příklad:

```
In[1]:=  2 + 3

Out[1]=  5
```

Toto označení se nám bude hodit, budeme-li chtít dále pracovat s výsledkem. Příklad užití je vidět níže:

```
In[2]:=  Out[1] * 10

Out[2]=  50
```

• **Palety nástrojů** - důležitý pomocník. Jednoduchým způsobem umožňují využívat jednotlivých funkcí programu. Palety se nacházejí v menu **Files → Palletes**. Při výpočtech nám budou nejvíce užitečné tyto palety:
  ○ **BasicCalculations** - obsahuje syntaxe příkazů pro aritmetiku, algebru, matice, trigonometrické a exponenciální funkce, integrální a diferenciální počet a vykreslování grafů,
  ○ **BasicInput** - umožňuje jednoduše zadat umocnění, zlomek, integrál atd.,
  ○ **CompleteCharacters** - umožňuje zadat různé druhy písma (řecké, skript, ...), technické symboly, tvary či operátory.

```
In[3]:=  2^100

Out[3]=  1267650600228229401496703205376
```

• **Menu "Format"** - prostřednictvím tohoto menu lze editačnímu oknu i jednotlivým buňkám měnit vlastnosti (velikost a typ písma, barva písma a pozadí, atd.).
• **Seskupování buněk** - v případě velkého množství výpočtů a pro lepší přehlednost můžeme buňky seskupovat. K tomu využijeme menu **Cell**.
• **Přesnost výsledků** - výsledky v tomto programu jsou vždy přesnými, exaktními výsledky.
  ○ příklad:

```
In[4]:=  2^100

Out[4]=  1267650600228229401496703205376
```

○ Naše výsledky však mohou mít i numericky aproximovaný tvar, např. jako při použití kalkulátoru. K tomu, abychom dosáhli výsledku v tomto tvaru, užijeme funkce **//N** (popř. **N[ ]**), kterou ukončíme zadávání vstupu.

○ příklad:

```
In[5]:= 2^100 // N
Out[5]= 1.26765×10^30

In[6]:= N[2^100]
Out[6]= 1.26765×10^30
```

● **Předchozí výsledek** - pomocí symbolu **%** můžeme využít předchozího výsledku.

○ příklad:

```
In[7]:= 23*10
Out[7]= 230

In[8]:= % - 30
Out[8]= 200
```

● **Typy závorek** - využíváme čtyř druhů závorek:

○ **( )** - kulaté závorky pro seskupování

○ **[ ]** - hranaté závorky pro funkce, např.: f[x]

○ **{ }** - složené závorky pro výpisy, např.: {a, b, c}

○ **[[ ]]** - dvojité hranaté závorky pro indexování, např.: v[[*i*]] (matice)

● **Přerušení výpočtu** - pomocí kombinace kláves **alt+čárka**.

0.2. Shrnutí základních pravidel

● Argumenty a funkce uvádíme v hranatých závorkách.

● Názvy funkcí zadáváme s velkým písmenem na začátku.

● Názvy proměnných a námi definovaných funkcí zadáváme malými písmeny.

● K umocnění používáme ^ nebo palety nástrojů $\square^{\square}$.

● **Násobení může být prezentováno mezerou!**

● K zápisu desetinného čísla používáme tečku.

● Čísla ve vědeckém zápisu vypadají např. takto **1.4*10^-23** nebo **1.4 10^-23**.

● Nápovědu k jakékoliv funkci lze získat pomocí klávesy F1.

1. Diferenciální počet funkce jedné proměnné

1.1. Práce s proměnnou. Reálná funkce reálné proměnné. Grafy funkcí

1.1.1. Definice proměnné a práce s proměnnými

● Proměnnou definujeme pomocí syntaxe: **název_proměnné = zvolená_hodnota**.
○ příklad:

```
In[9]:= x = 12
Out[9]= 12
```

● Nyní máme v proměnné ***x*** uloženu hodnotu **12**. Proveďme výpočet výrazu x^2, za proměnnou ***x*** je automaticky dosazena její hodnota.
○ příklad:

```
In[10]:= x^2
Out[10]= 144
```

● Další definování proměnné se stejným názvem (v našem případě ***x***) způsobí přepsání předchozí hodnoty.
○ příklad:

```
In[11]:= x = 2 + a
Out[11]= 2 + a
```

● Tato nová hodnota proměnné ***x*** se pak stává platnou pro další požití dané proměnné.
○ příklad:

```
In[12]:= x^2
Out[12]= (2 + a)^2
```

● Pro vymazání definice proměnné použijeme symbolu **tečka**. Proměnné již nebude přiřazena žádná hodnota a bude vystupovat pouze jako symbol.

```
In[14]:= x = .
```

● V následujícím výrazu pak nebude přiřazena ***x*** žádná hodnota

```
In[15]:=  x - 2 + 3 x

Out[15]=  -2 + 4 x
```

● Chceme-li přiřadit proměnné hodnotu pouze v jednom výrazu, užijeme následující syntaxe:

výraz/.x→zvolená_hodnota.

■ *pozn.:* ***Mathematica CalcCenter*** **tuto syntaxi pro přiřazení nepodporuje**

○ příklad:

```
In[16]:=  26 - x^3 /. x → 2

Out[16]=  18
```

○ příklad:

```
In[17]:=  26 - x^3 /. x → 2 - a
```

Out[17]= $26-(2-a)^3$

● Přesvědčme se, že v ***x*** není uložena žádná hodnota, tj. že předchozí definice proměnné ***x*** byly pouze pro dané výrazy.

```
In[18]:=  26 - x^3
```

Out[18]= $26-x^3$

● Definici můžeme provést i pro více promenných. Definici však musíme uzavřít do složených závorek.

```
In[19]:=  (x + y) * (x - y) ^2 /. {x → 3, y → 1 - a}
```

Out[19]= $(4-a)\,(2+a)^2$

1.1.2. Definice funkce

● Kromě toho, že *Mathematica* obsahuje mnoho integrovaných funkcí, umožňuje uživateli také definování vlastních funkcí.

● Uvedeme si příklad, který definuje funkci **f** proměnné ***x***. Při definici se používá přiřazovacího symbolu **:=**. Za tímto symbolem pak následuje vyjádření samotné funkce.

○ příklad:

```
In[20]:=  f[x_] := x^2
```

○ **pozor: ! podtržítko za proměnnou v definici funkce nesmíme zapomenout !**

● Funkci pak voláme jejím názvem a argumentem v hranatých závorkách. Argumentem funkce může být číslo nebo jakýkoliv výraz.

○ příklady:

```
In[21]:=  f[5]
Out[21]=  25
In[22]:=  f[2 + a]
Out[22]=  (2 + a)^2
In[23]:=  f[x^2 + 3 x + 6]
Out[23]=  (6 + 3 x + x^2)^2
```

● Námi definovanou funkci můžeme použít k různým výpočtům v kombinaci s jinými funkcemi vestavěnými v prostředí *Mathematica*.

○ příklad:

```
In[24]:=  Sqrt[f[4]]
Out[24]=  4
```

● Pro zobrazení definice námi vytvořené funkce lze využít syntaxe **?název_funkce**.

○ příklad:

```
In[25]:=  ?f
    Global`f
    f[x_] := x^2
```

● Pro vymazání námi vytvořené funkce využijeme výrazu **Clear[název_funkce]**.

```
In[26]:=  Clear[f]
```

● Jako v případě proměnné i zde lze předefinovat námi vytvořenou funkci. Vytvořme se funkci **mocnina**.

```
In[27]:=  mocnina[x_] := x^2
```

● Za ***x*** dosaďme např. číslo 3

```
In[28]:=  mocnina[3]
Out[28]=  9
```

● Předefinujme nyní funkci **mocnina**.

```
In[29]:=  mocnina[x_] := x^3
```

● A opět dosaďme za ***x*** číslo 3.

```
In[30]:=  mocnina[3]
Out[30]=  27
```

1.1.3. Grafy funkcí

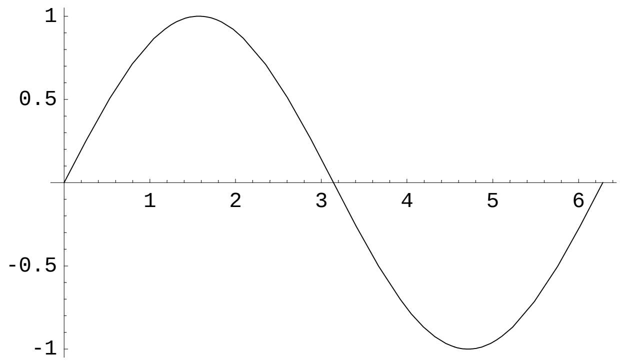
■ pozn.: **Tvorba a úprava grafů v *Mathematica CalcCenter* je velmi zjednodušená.**

• Pro vykreslení 2D grafů funkcí je v *Mathematice* zabudována funkce **Plot**. Pokusím se zde vystihnout základní vlastnosti této funkce, vše budu prezentovat na příslušných příkladech.

• V argumentu funkce Plot musí být zadána nejdříve vykreslovací funkce a dále ve složených závorkách proměnná, pro kterou je funkce vykreslována, a meze této nezávislé proměnné. Syntaxe vypadá takto: **Plot[název_funkce, {proměnná, min, max}]**.

○ příklad:

```
In[31]:= Plot[Sin[x], {x, 0, 2*π}]
```



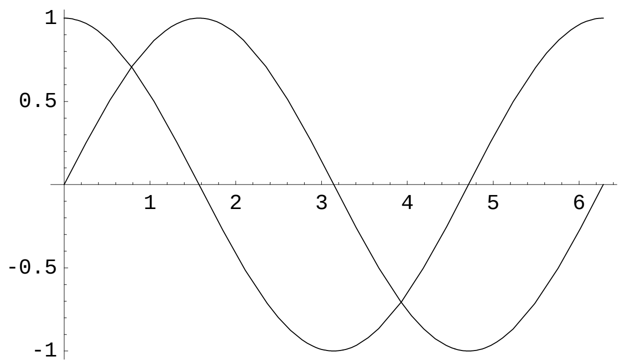
```
Out[31]= - Graphics -
```

• Do jednoho grafu můžeme vykreslit i více funkcí. Tyto fukce musíme uzavřít do složených závorek. Zápis bude následující:

Plot[{ fce_1**, ...,** fce_n**}, {x, xmin, xmax}]**.

○ příklad:

```
In[32]:= Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2*Pi}]
```



```
Out[32]=  - Graphics -
```

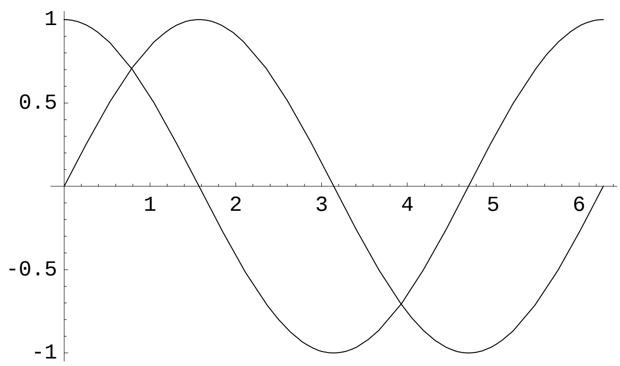
• Pro zpřehlednění zápisu lze nejdříve definovat proměnnou, do které uvedeme seznam všech funkcí, pro které chceme vykreslit jejich průběh.

```
In[33]:=  prom = {Sin[x], Cos [x]}

Out[33]=  {Sin[x], Cos[x]}
```

• Poté můžeme takovou proměnnou použít ve funkci **Plot**. Zde je však jedno úskalí. Takto nadefinovanou proměnnou musíme nejdříve vyhodnotit (vyvolat). To realizujeme pomoci funkce **Evaluate** na místě prvního argumentu funkce **Plot**. Syntaxe pak vypadá takto: **Plot[Evaluate[prom], {x, 0, 2 Pi}]**.

○ příklad:

```
In[34]:=  Plot[Evaluate[prom], {x, 0, 2 Pi}]
```




```
Out[34]=  - Graphics -
```

• Nyní se podívejme, jak se pracuje s parametry funkce **Plot**:

○ všechny parametry vestavěné funkce *fce* i s jejich výchozím nastavením lze vypsat pomocí funkce **Options[*fce*]**, v našem případě **Options[Plot]**.

```
In[35]:=  Options[Plot]

Out[35]=  {AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → Automatic, AxesLabel → None,
           AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → Automatic, Background → Automatic,
           ColorOutput → Automatic, Compiled → True, DefaultColor → Automatic,
           DefaultFont :→ $DefaultFont, DisplayFunction :→ $DisplayFunction, Epilog → {},
           FormatType :→ $FormatType, Frame → False, FrameLabel → None, FrameStyle → Automatic,
           FrameTicks → Automatic, GridLines → None, ImageSize → Automatic,
           MaxBend → 10., PlotDivision → 30., PlotLabel → None, PlotPoints → 25,
           PlotRange → Automatic, PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic,
           Prolog → {}, RotateLabel → True, TextStyle :→ $TextStyle, Ticks → Automatic}
```

○ pokud nás zajímá jen konkrétní parametr dané funkce, použijeme funkci **Options** s parametrem, viz. následující příklad:

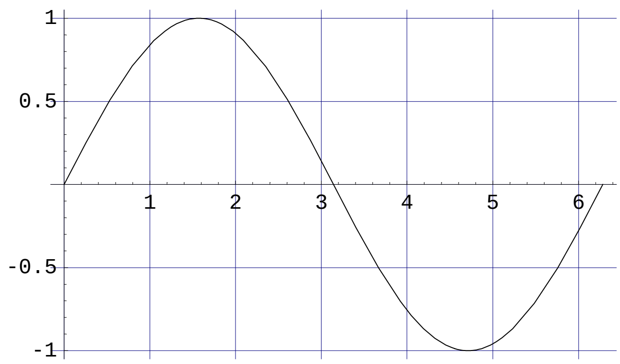
```
In[36]:= Options[Plot, GridLines]
Out[36]= {GridLines → None}
```

○ pro změnu výchozího nastavení některého z parametrů dané funkce musíme použít funkci **SetOptions**. Příklad použití této funkce si ukážeme právě na funkci **Plot**. Změníme výchozí hodnotu parametru **GridLines** z původní hodnoty "None" a novou hodnotu "Automatic".

```
In[37]:= SetOptions[Plot, GridLines → Automatic]
Out[37]= {AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → Automatic, AxesLabel → None,
  AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → Automatic, Background → Automatic,
  ColorOutput → Automatic, Compiled → True, DefaultColor → Automatic,
  DefaultFont :→ $DefaultFont, DisplayFunction :→ $DisplayFunction, Epilog → {},
  FormatType :→ $FormatType, Frame → False, FrameLabel → None, FrameStyle → Automatic,
  FrameTicks → Automatic, GridLines → Automatic, ImageSize → Automatic,
  MaxBend → 10., PlotDivision → 30., PlotLabel → None, PlotPoints → 25,
  PlotRange → Automatic, PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic,
  Prolog → {}, RotateLabel → True, TextStyle :→ $TextStyle, Ticks → Automatic}
```

○ vzhled grafu po provedené změně:

```
In[38]:= Plot [Sin[x], {x, 0, 2 Pi}]
```




```
Out[38]= - Graphics -
```

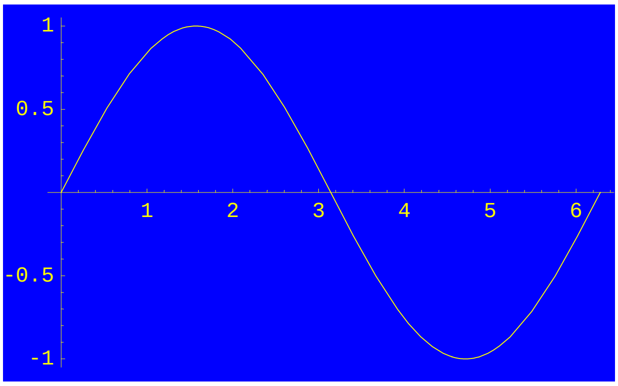
○ opětovné zrušení mřížky

```
In[39]:= SetOptions [Plot, GridLines → None]
Out[39]= {AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → Automatic, AxesLabel → None,
  AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → Automatic, Background → Automatic,
  ColorOutput → Automatic, Compiled → True, DefaultColor → Automatic,
  DefaultFont :→ $DefaultFont, DisplayFunction :→ $DisplayFunction, Epilog → {},
  FormatType :→ $FormatType, Frame → False, FrameLabel → None, FrameStyle → Automatic,
  FrameTicks → Automatic, GridLines → None, ImageSize → Automatic,
  MaxBend → 10., PlotDivision → 30., PlotLabel → None, PlotPoints → 25,
  PlotRange → Automatic, PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic,
  Prolog → {}, RotateLabel → True, TextStyle :→ $TextStyle, Ticks → Automatic}
```

○ pozn.: změny parametrů funkce **Plot** pomocí funkce **SetOptions** platí pro všechny následně vytvořené grafy, chceme-li však změnit parametry jen u určitého grafu, napíšeme tyto změny přímo ve funkci **Plot**

▪ příklad:

```
In[40]:= Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}, Background → Blue]
```




```
Out[40]= - Graphics -
```

● Popis vybraných parametrů funkce **Plot**:

○ Parametry os grafu

▪ Axes - parametr pro vykreslování os

možnosti nastavení

Axes → True	- osy budou vykresleny
Axes → False	- osy nebudou vykresleny
Axes → {True, False}	- osa ***x*** bude vykreslena, osa ***y*** nebude vykreslena (i naopak)

▪ AxesLabel - parametr pro popisky os grafu

možnosti nastavení

AxesLabel → None	- žádne popisky os
AxesLabel → nazev_popisku	- udává popisek pro osu ***y*** u 2D grafu a pro osu ***z*** u 3D grafu
AxesLabel → {nazev_x, nazev_y}	- popisky pro jednotlivé osy

▪ AxesOrigin - parametr pro určení průsečíku osy ***x*** a ***y***

možnosti nastavení

AxesOrigin → {x, y}	- průsečík je dán bodem {x, y}
AxesOrigin → Automatic	- pomocí vnitřního algoritmu *Mathematica* určí průsečík os

▪ Ticks - parametr pro nastavení značek měřítka os

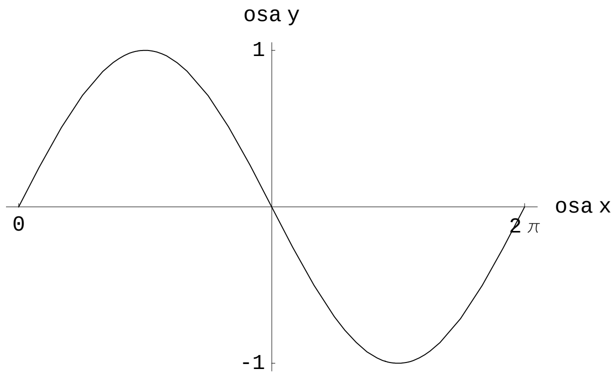
možnosti nastavení

Ticks → None	- graf bez značek měěřítka os
Ticks → Automatic	- značky měřítka os budou vykresleny automaticky
Ticks → $\{\{x_1, x_2, ..., x_N\}, \{y_1, y_2, ..., y_N\}\}$	- zadání značek na specifické pozice
Ticks → $\{\{x_1$, nazev_x$_1$, ...$\}, \{y_1$, nazev_y_1, ...$\}\}$	- zadání značek se specifickými

jmény na specifické pozice

○ příklad na uvedené parametry os grafu:

```
In[41]:=  Plot [Sin[x], {x, 0, 2 Pi}, Axes → True, AxesLabel → {osa x, osa y},
           AxesOrigin → {Pi, 0}, Ticks → {{0, 2 Pi}, {-1, 1}}]
```




```
Out[41]=  - Graphics -
```

○ Parametry rámu grafu

- Frame - parametr pro orámování grafu

  možnosti nastavení

Frame → True	- graf bude orámován
Frame → False	- graf nebude orámován

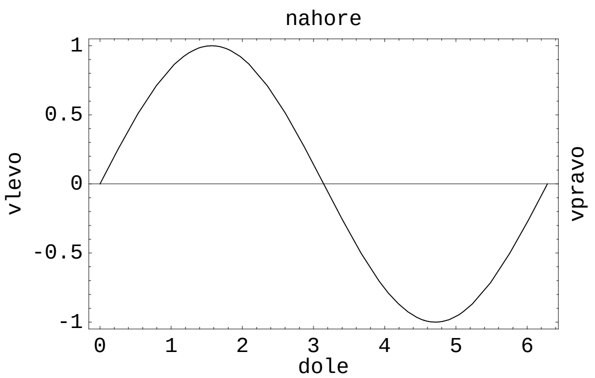
- FrameLabel - parametr pro pojmenování jednotlivých stran

  možnosti nastavení

FrameLabel → None	- bez pojmenování rámu
FrameLabel → {x_down, y_left}	- pojmenuje spodní a levou část rámu
FrameLabel → {x_down, y_left, x_up, y_right}	- pojmenuje spodní, levou, horní a pravou část rámu

○ příklad na výše uvedené parametry:

```
In[42]:=  Plot [Sin[x], {x, 0, 2 Pi}, Frame → True, FrameLabel → {dole, vlevo, nahore, vpravo}]
```




```
Out[42]=  - Graphics -
```

○ Text v grafu

▪ PlotLabel - parametr pro pojmenování grafu

možnosti nastavení

PlotLabel → None	- žádné pojmenování
PlotLabel → název_grafu	- k pojmenování grafu můžeme použít libovolného výrazu, chceme-li, aby měl tvar textového řetězce, použijeme uvozovek

▪ TextStyle - parametr pro nastavení stylu písma v celém grafu

možnosti nastavení

TextStyle → {"style"}	- výběr stylu písma, lze použít předdefinovaných stylů jako v nabídce *Format* → *Style*

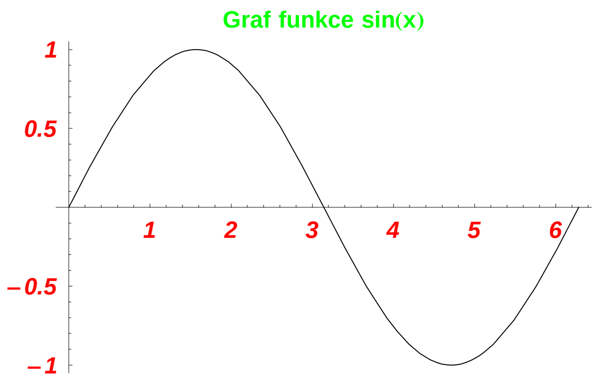
▪ StyleForm - parametr pro nastavení style vybraného textu

možnosti nastavení

StyleForm[*expr*, "*style*"]	- *expr* je výraz, u kterého nastavujeme předdefinovaný "*style*" podle *Format* → *Style*

○ příklad na výše uvedené parametry:

```
In[43]:= Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}, PlotLabel →
           StyleForm["Graf funkce sin(x)", FontColor → Green, FontSlant → "Plain"],
          TextStyle → {FontFamily → "Arial", FontSize → 11,
            FontColor → RGBColor[1, 0, 0], FontWeight → "Bold", FontSlant → "Italic"} ]
```




```
Out[43]=  - Graphics -
```

● Funkce **Show** - zobrazení grafů

○ *Mathematica* je schopna uchovávat v proměnných grafy a informace o grafech, které vytvoříme. K těmto proměnným můžeme později přistoupit pomocí funkce **Show** a tak znovuzobrazit již dříve nadefinované grafy. Syntaxe funkce je následující: **Show[název_grafu]**.

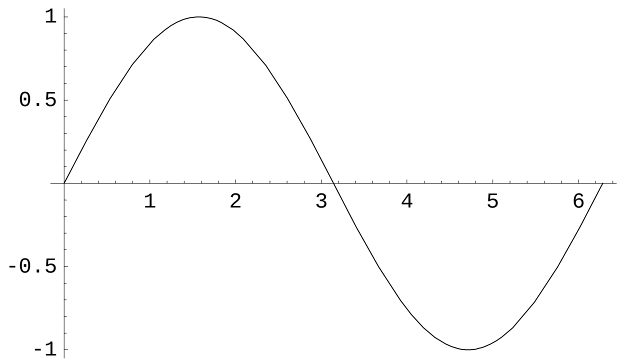
možnosti nastavení

▪ Show[graf1, graf2, ...]	- vykreslí více grafů do jednoho
▪ Show[GraphicsArray[{graf1, graf2}]]	- vykreslí graf do pole (zasebou)
▪ Show [GraphicsArray[{{graf1}, {graf2}}]]	- vykreslí graf do pole (pod sebe)

○ příklady:

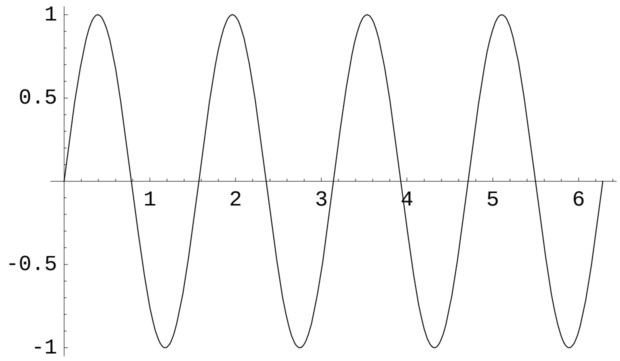
▪ nejdříve si uložíme do proměnných *graf1* a *graf2* různé grafy

```
In[44]:= graf1 = Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}]
```



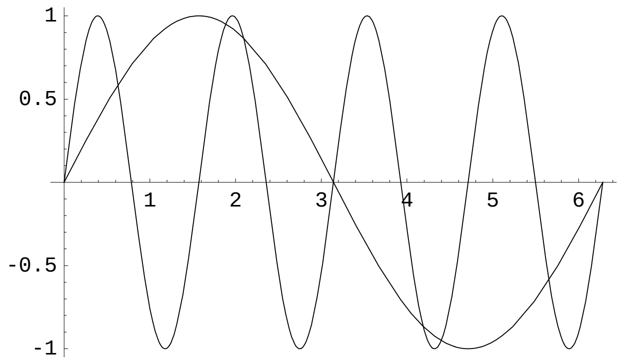

```
Out[44]=  - Graphics -
```

```
In[45]:=  graf2 = Plot[Sin[4 x], {x, 0, 2 Pi}]
```



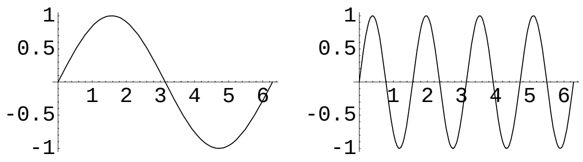

```
Out[45]=  - Graphics -
```

```
In[46]:=  Show[graf1, graf2]
```



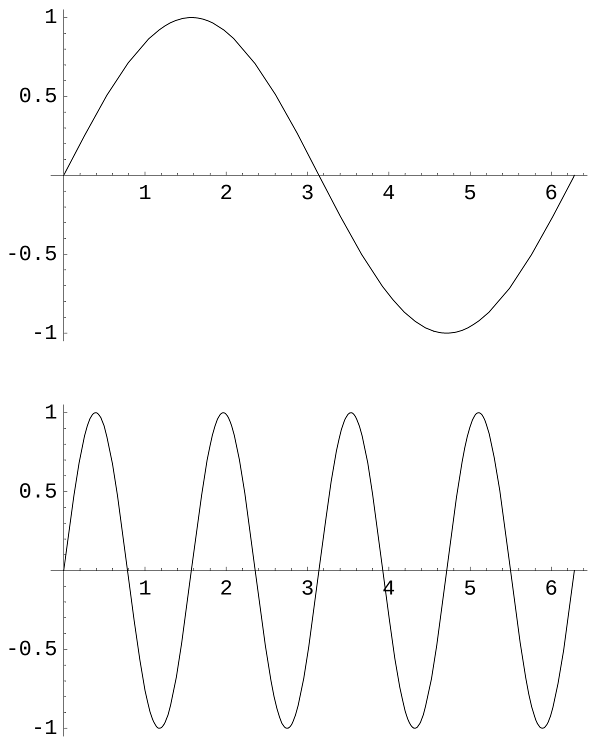

```
Out[46]=  - Graphics -
```

```
In[47]:=  Show[GraphicsArray[{graf1, graf2}]]
```



Out[47]= - GraphicsArray -

In[48]:= **Show**[**GraphicsArray**[{{**graf1**}, {**graf2**}}]]



Out[48]= - GraphicsArray -

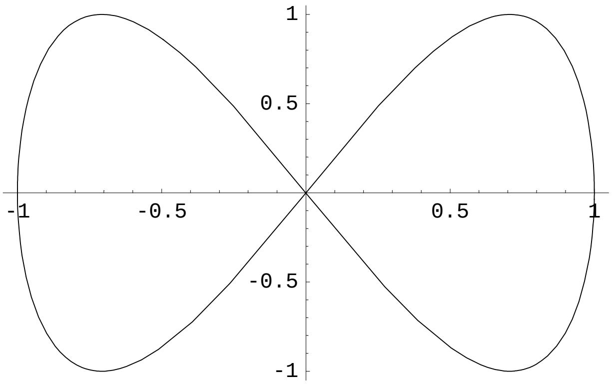
● Funkce **ParametricPlot** - graf funkce zadané parametricky.

○ Nastavení parametrů této funkce je stejné jako u funkce Plot.

○ Syntaxe: **ParametricPlot[{ f_x, f_y }, {t, tmin, tmax}]**

○ příklad:

In[49]:= **ParametricPlot**[{**Sin**[**t**], **Sin**[**2 t**]}, {**t**, **0**, **2 Pi**}]



Out[49]= - Graphics -

1.2. Výpočet limity funkce

1.2.1. Limita v bodě

■ pozn.: **Funkce *Limit* není v *Mathematica CalcCenter* podporována !!! Kapitoly 1.2.1 až 1.2.9 jsou určeny jen pro produkt *Mathematica.***

• Obecný předpis pro limitu funkce *fce* pro x blížící se x_0: **Limit[fce, x→x_0]**.

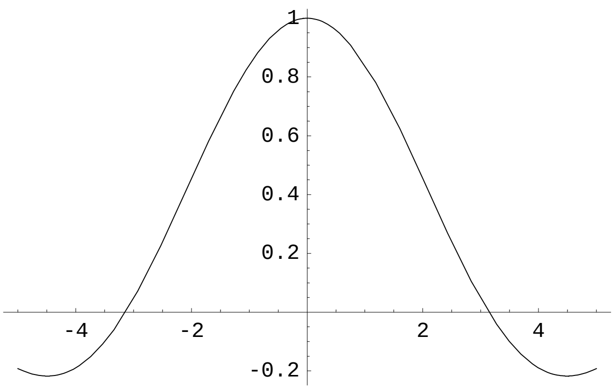
○ příklad:

```
In[50]:= Limit[Sin[x] / x, x → 0]
```

```
Out[50]= 1
```

• Pro ověření správnosti výsledku si vykreslíme graf.

```
In[51]:= Plot[Sin[x] / x, {x, -5, 5}]
```



Out[51]= - Graphics -

1.2.2. Limita v bodě - příklady

• Příklady k procvičení - vypočítejte limity a zobrazte grafy příslušných funkcí na daných intervalech:

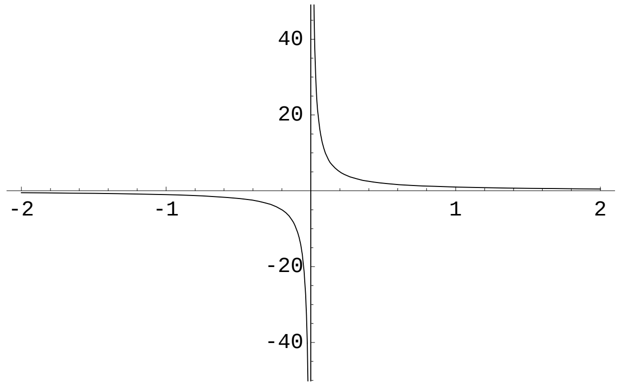
a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$	(-2, 2)
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$	(1, 100), (-0.8, 1)
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$		(-0.9, 0.3)
d)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}$	(-20, 1), (10, 200)
e)	$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{(x+\frac{\pi}{2})^2}$		(-15, 15)
f)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln(1+x)}{2x-\ln(1+x)}$		(-0.2, 5)

1.2.3. Limita v bodě - výsledky

• Řešení:

a)

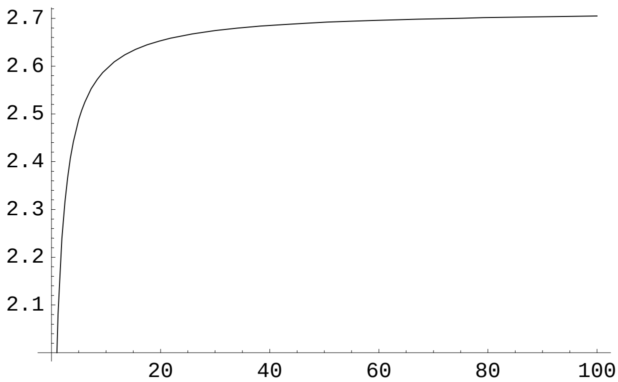
```
In[52]:= Limit[1 / x, x → ∞]

Out[52]= 0

In[53]:= Limit[1 / x, x → -∞]

Out[53]= 0

In[54]:= Plot[1 / x, {x, -2, 2}]
```




```
Out[54]=  - Graphics -
```

b)

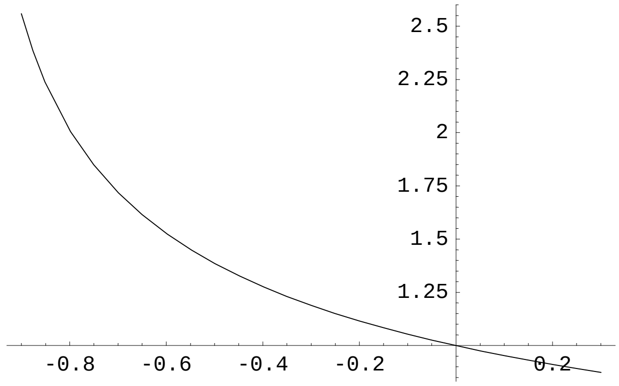
```
In[55]:=  Limit[(1 + 1 / x)^x, x → ∞]

Out[55]=  ⅇ

In[56]:=  Plot[(1 + 1 / x)^x, {x, 1, 100}]
```




```
Out[56]=  - Graphics -
```

c)

```
In[57]:=  Limit[Log[(1 + x)] / x, x → 0]

Out[57]=  1

In[58]:=  Plot[Log[(1 + x)] / x, {x, -0.9, 0.3}]
```



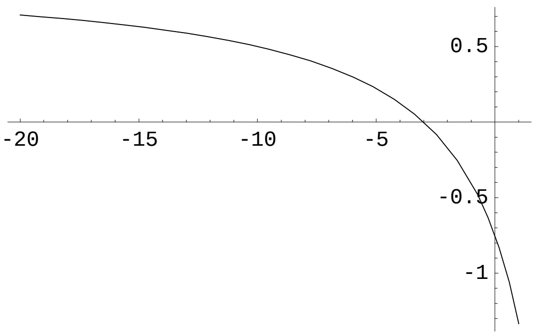
Out[58]= - Graphics -

d)

In[59]:= **Limit**[(**x**^{2} − **9**) / (**x**^{2} − **7 x** + **12**), **x** → **0**]

Out[59]= $-\frac{3}{4}$

Plot[(**x**^{2} − **9**) / (**x**^{2} − **7 x** + **12**), {**x**, −**20**, **1**}]

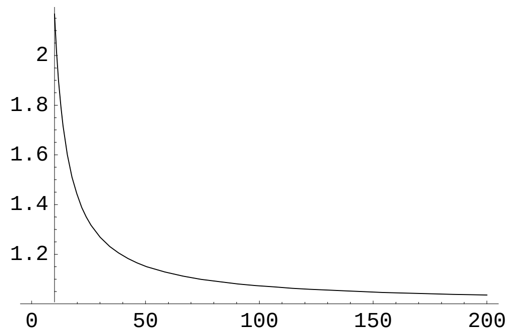


- Graphics -

In[60]:= **Limit**[(**x**^{2} − **9**) / (**x**^{2} − **7 x** + **12**), **x** → ∞]

Out[60]= 1

In[61]:= **Plot**[(**x**^{2} − **9**) / (**x**^{2} − **7 x** + **12**), {**x**, **10**, **200**}, **AxesOrigin** → {**10**, **1**}]

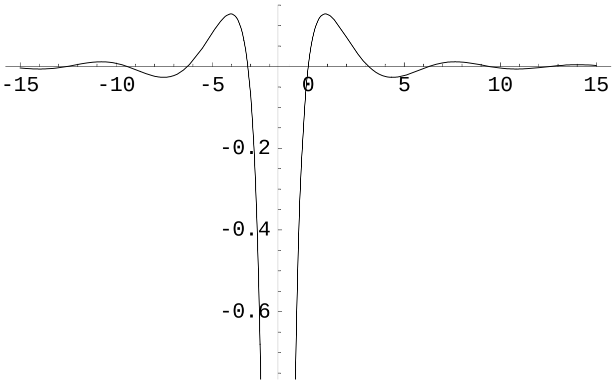


Out[61]= - Graphics -

e)

In[62]:= **Limit**[**Sin**[**x**] / (**x** + **Pi** / **2**)^2, **x** → −**Pi** / **2**]

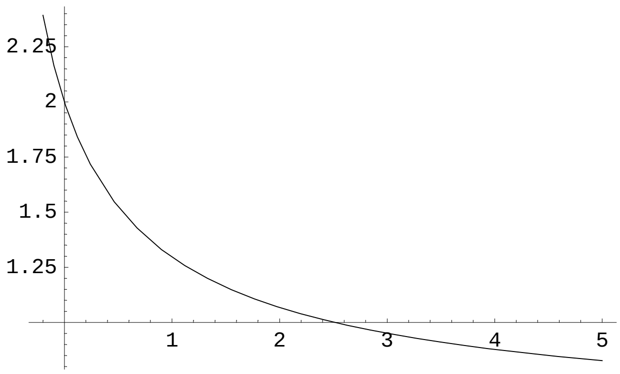
```
Out[62]=  -∞

In[63]:=  Plot[Sin[x] / (x + Pi / 2)^2, {x, -15, 15}, AxesOrigin → {-Pi / 2, Automatic}]
```




```
Out[63]=  - Graphics -
```

f)

```
In[64]:=  Limit[(x + Log[1 + x]) / (2 x - Log[1 + x]), x → 0]

Out[64]=  2

In[65]:=  Plot[(x + Log[1 + x]) / (2 x - Log[1 + x]), {x, -0.2, 5}]
```




```
Out[65]=  - Graphics -
```

1.2.4. Jednostranné limity

• Obecný předpis pro jednostrannou limitu funkce *fce* pro *x* blížící se x_0: **Limit[fce, x→x_0, Direction→±1]**.
• Jak je vidět, v předpisu se vyskytuje parametr **Direction**. Tento parametr nabývá pouze dvou hodnot, v závislosti na typu jednostranné limity. Pro limitu zleva nabývá hodnoty **1** a pro limytu zprava hodnoty **-1**.

○ příklad:

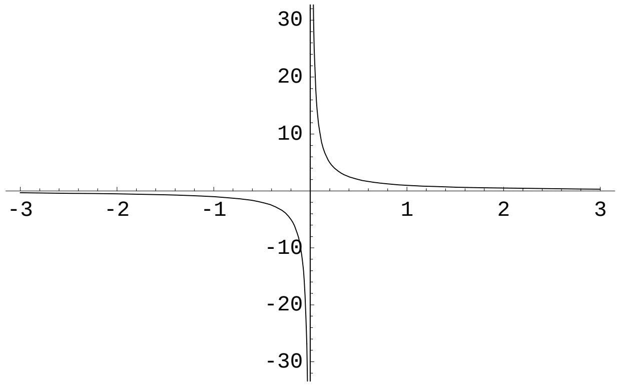
```
In[66]:=  Limit[1 / x, x → 0, Direction → 1]

Out[66]=  -∞
```

```
In[67]:= Limit[1 / x, x → 0, Direction → -1]
```

```
Out[67]= ∞
```

• Opět si vykreslíme graf.

```
In[68]:= Plot [1 / x, {x, -3, 3}]
```




```
Out[68]= - Graphics -
```

1.2.5. Jednostranné limity - příklady

• Příklady k procvičení - vypočítejte limity a zobrazte grafy příslušných funkcí na daných intervalech:

a)	$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1}$	(-1, 3)
b)	$\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}(\frac{1}{1-x})$	$\lim\limits_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}(\frac{1}{1-x})$	(-20, 20)
c)	$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$	(-5, 5)

1.2.6. Jednostranné limity - výsledky

• Řešení:

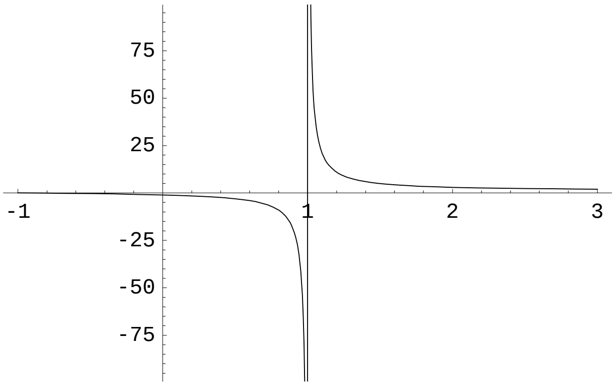
a)

```
In[69]:= Limit[(x + 1) / (x - 1), x → 1, Direction → 1]
```

```
Out[69]= -∞
```

```
In[70]:= Limit[(x + 1) / (x - 1), x → 1, Direction → -1]
```

```
Out[70]=  ∞

In[71]:=  Plot[(x + 1) / (x - 1), {x, -1, 3}]
```




```
Out[71]=  - Graphics -
```

b)

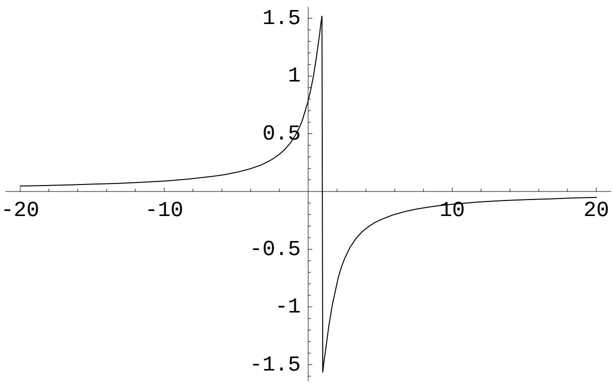
```
In[72]:=  Limit[ArcTan[1 / (1 - x)], x → 1, Direction → -1]
```

Out[72]= $-\frac{\pi}{2}$

```
In[73]:=  Limit[ArcTan[1 / (1 - x)], x → 1, Direction → 1]
```

Out[73]= $\frac{\pi}{2}$

```
In[74]:=  Plot[ArcTan[1 / (1 - x)], {x, -20, 20}]
```




```
Out[74]=  - Graphics -
```

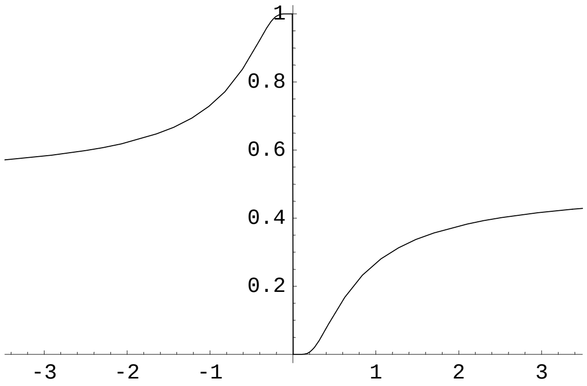
c)

In[75]:= Limit$\left[1 \middle/ \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)\right.$, x → 0, Direction → 1$\left.\right]$

Out[75]= 1

In[76]:= Limit$\left[1 \middle/ \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)\right.$, x → 0, Direction → -1$\left.\right]$

```
Out[76]=  0

In[77]:=  Plot[1/(1 + e^(1/x)), {x, -5, 5}]
```




```
Out[77]=  - Graphics -
```

1.2.7. Limita funkce více proměnných

• Obecný předpis pro limitu funkce *fce* dvou proměnných *x* a *y* blížících se x_0 a y_0:

Limit[Limit[fce, x→x_0], y→y_0].

• Pro limitu funkce tří a více proměnných je postup stejný, na půdovní limitu "nabalujeme" další limity.

○ příklad:

```
In[78]:=  Limit[Limit[3*y - x*y, x → 2], y → 3]

Out[78]=  3
```

• **Pokud limita funkce více proměnných existuje, pak nezáleží na pořadí vyhodnocení proměnných**.

○ příklad - využijeme předešlého příkladu, nyní však budeme nejdříve počítat limitu proměnné *y* a poté proměnné *x*

```
In[79]:=  Limit[Limit[3*y - x*y, y → 3], x → 2]

Out[79]=  3
```

○ Oba výsledky se shodují.

1.2.8. Limita funkce více proměnných - příklady

• Příklady k procvičení -vyšetřete existenci následujících limit v daném bodě, existuje-li limita, určete její hodnotu v tomto bodě:

a) $\lim\limits_{(x,\, y)\to(2,\, 3)} \frac{y-3}{x+y-5}$

b) $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{x+y}{x-y}$

c) $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{x^2\, y^2}{x^2\, y-(x-y)^2}$

d) $\lim\limits_{(x,\, y)\to(1,\, 1)} \left(\frac{\mathrm{tg}(x^2-y^2)}{x-y}\right)^{\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}+y}}$

1.2.9. Limita funkce více proměnných - výsledky

● Řešení:

a)

```
In[80]:= Limit[Limit[(y - 3) / (x + y - 5), x → 2], y → 3]

Out[80]= 1

In[81]:= Limit[Limit[(y - 3) / (x + y - 5), y → 3], x → 2]

Out[81]= 0
```

<u>závěr</u>: limita $\lim\limits_{(x,\, y)\to(2,\, 3)} \frac{y-3}{x+y-5}$ v daném bodě neexistuje

b)

```
In[82]:= Limit[Limit[(x + y) / (x - y), x → 0], y → 0]

Out[82]= -1

In[83]:= Limit[Limit[(x + y) / (x - y), y → 0], x → 0]

Out[83]= 1
```

<u>závěr</u>: limita $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{x+y}{x-y}$ v daném bodě neexistuje

c)

```
In[84]:= Limit[Limit[(x^2 y^2) / (x^2 y - (x - y)^2), x → 0], y → 0]

Out[84]= 0

In[85]:= Limit[Limit[(x^2 y^2) / (x^2 y - (x - y)^2), y → 0], x → 0]

Out[85]= 0
```

závěr: limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y-(x-y)^2}$ v daném bodě existuje a její hodnota je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y-(x-y)^2}=0$

d)

In[86]:= $\text{Limit}\left[\text{Limit}\left[\left(\frac{\text{Tan}[x^2-y^2]}{x-y}\right)^{\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}+y}}, x\to 1\right], y\to 1\right]$

Out[86]= 2

In[87]:= $\text{Limit}\left[\text{Limit}\left[\left(\frac{\text{Tan}[x^2-y^2]}{x-y}\right)^{\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}+y}}, x\to 1\right], y\to 1\right]$

Out[87]= 2

závěr: limita $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{\text{tg}(x^2-y^2)}{x-y}\right)^{\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}+y}}$ v daném bodě existuje a její hodnota je $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{\text{tg}(x^2-y^2)}{x-y}\right)^{\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}+y}} = 2$

1.3. Derivace funkce

1.3.1. Výpočet derivace

● V prostředí *Mathematica* je možno derivaci zadávat více způsoby. Podívejme se nyní na tyto možnosti:

○ pomocí symbolu $\partial_\square$ nebo funkce **D** — $\boldsymbol{\partial_x}$ **fce** nebo **D[fce, x]**

○ pomocí funkce **Derivative** — **Derivative[1][fce][x]**

▪ zde však nejdříve musíme definovat funkci, kterou chceme derivovat, např. **funkce[x_]:=x^2**, pak již můžeme použít **Derivative[1][funkce][x]**

▫ pozn.: číslo v první závorce za slovem Derivative znamená stupeň derivace, takže v našem případě se jedná o první derivaci.

○ klasicky pomocí apostrofu — **f ' [x]**

▪ platí zde to samé jako v předchzím bodě, nejdříve definujeme funkci a pak ji zderivujeme, tzn.

derivovana_fce[x_]:= x^3+x

derivovana_fce'[x]

○ uveďme si pár příkladů na různé zápisy derivace:

In[88]:= $\partial_x (x^4 - 3x^2 + 10)$

Out[88]= $-6x + 4x^3$

```
In[89]:= D[x^4 - 3 x^2 + 10, x]
```

Out[89]= $-6\,x + 4\,x^3$

```
In[90]:= f1[x_] := x^4 - 3 x^2 + 10; Derivative[1][f1][x]
```

Out[90]= $-6\,x + 4\,x^3$

```
In[91]:= f2[x_] := x^4 - 3 x^2 + 10; f2'[x]
```

Out[91]= $-6\,x + 4\,x^3$

○ derivace v daném bodě - využijeme funkce **Derivative**, místo proměnné, podle které derivujeme, napíšeme hodnotu:

```
In[92]:= fce[x_] := 3 x^2 - 4 x; Derivative[1][fce][3]
```

Out[92]= 14

1.3.2. Příklady

● Příklady k procvičení - derivujte následující funkce (podle proměnné ***x***):

a) f1(x) = arctg(x)

b) f2(x) = argcosh(x)

c) f3(x) = arcsin($\frac{1-x^2}{1+x^2}$) (obecně a pro x = 1)

d) f4(x) = $\frac{\ln\cos(x)}{\ln x}$

e) f5(x) = (1+x)$\sqrt{2+x^2}\ \sqrt[3]{3+x^3}$ (obecně a pro x = 0)

f) f6(x) = exp x + exp(exp x) + exp(exp(exp x))

g) f7(x) = e^x(1+cotg $\frac{x}{2}$) (obecně a pro x = π)

1.3.3. Výsledky

• Řešení:

a)

In[93]:= `f1[x_] := ArcTan[x]; f1'[x]`

Out[93]= $\frac{1}{1+x^2}$

b)

In[94]:= `f2[x_] := ArcCosh[x]; f2'[x]`

Out[94]= $\frac{1}{\sqrt{-1+x}\ \sqrt{1+x}}$

c)

In[95]:= `f3[x_] := ArcSin[(1 - x^2) / (1 + x^2)]; f3'[x]`

Out[95]= $\frac{-\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}-\frac{2x}{1+x^2}}{\sqrt{1-\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}$

In[96]:= `f3'[1]`

Out[96]= -1

d)

In[97]:= `f4[x_] := Log[Cos[x]] / Log[x]; f4'[x]`

Out[97]= $-\frac{\text{Log}[\text{Cos}[x]]}{x\,\text{Log}[x]^2}-\frac{\text{Tan}[x]}{\text{Log}[x]}$

e)

In[98]:= `f5[x_] := (1 + x) √(2 + x^2) ∛(3 + x^3); f5'[x]`

Out[98]= $\frac{x^2\ (1+x)\ \sqrt{2+x^2}}{(3+x^3)^{2/3}}+\frac{x\ (1+x)\ (3+x^3)^{1/3}}{\sqrt{2+x^2}}+\sqrt{2+x^2}\ (3+x^3)^{1/3}$

In[99]:= `f5'[0]`

Out[99]= $\sqrt{2}\ 3^{1/3}$

f)

In[100]:=

`f6[x_] := ⅇ^x + ⅇ^ⅇ^x + ⅇ^ⅇ^ⅇ^x; f6'[x]`

Out[100]=

$e^x+e^{e^x+x}+e^{e^{e^x}+e^x+x}$

g)

In[101]:=

`f7[x_] := ⅇ^x (1 + Cot[x/2]); f7'[x]`

Out[101]=

$$e^x \left(1+\text{Cot}\left[\frac{x}{2}\right]\right)-\frac{1}{2} e^x \text{Csc}\left[\frac{x}{2}\right]^2$$

In[102]:=

```
f7'[Pi]
```

Out[102]=

$$\frac{e^{\pi}}{2}$$

- pozn.: funkce Csc[x] je kosekans a je roven Csc[x] = $\frac{1}{\text{Sin}[x]}$

1.4. Diferenciál funkce

1.4.1. Výpočet

- pozn.: **Diferenciál funkce není v *Mathematica CalcCenter* podporován.**

- V prostředí *Mathematica* lze diferenciál funkce určit pomocí vestavěné funkce Dt. Syntaxe je následující:
  - **Dt [fce]** najde diferenciál funkce *fce*.

- Uveďme si několik příkladů:
  - příklad 1.

In[103]:=

```
Dt[3 x + 4]
```

Out[103]=

```
3 Dt[x]
```

- příklad 2.

In[104]:=

```
Dt[2 x^2 - 3 x + 4]
```

Out[104]=

```
-3 Dt[x] + 4 x Dt[x]
```

- příklad 3.

In[105]:=

```
Simplify[Dt[2 x^2 - 3 x + 4]]
```

Out[105]=

```
(-3 + 4 x) Dt[x]
```

- příklad 4.

In[106]:=
```
Dt[a x, Constants → a]
```
Out[106]=
```
a Dt[x, Constants → {a}]
```

• Pokud bychom v příkladu 4. nedefinovali konstantu *a* pomocí parametru **Constants**, *Mathematica* by s touto konstantou pracovala jako s proměnnou závislou na *x*, tj. $a = a(x)$.

○ příklad 5.

In[107]:=
```
Dt[ a x^2 + b x + c, Constants → {a, b, c}]
```
Out[107]=
```
b Dt[x, Constants → {a, b, c}] + 2 a x Dt[x, Constants → {a, b, c}]
```

○ příklad 6.

In[108]:=
```
Simplify[Dt[ a x^2 + b x + c, Constants → {a, b, c}]]
```
Out[108]=
```
(b + 2 a x) Dt[x, Constants → {a, b, c}]
```
In[111]:=
```
Out[108] /. Dt[x, Constants → {a, b, c}] → dx
```
Out[111]=
```
dx (b + 2 a x)
```

1.5. Derivace vyšších řádů

1.5.1. Výpočet

• K zadávání derivace vyšších řádů se využívá stejných funkcí jako v případě derivace prvního řádu, uveďme si nyní tyto funkce v obecném tvaru:

○ funkce **D** **D[fce, {x, n}]**
○ **Derivative** **Derivative[n][fce][x]**
○ klasicky pomocí apostrofu **f '''' [x]**

▪ pozn.: kolik apostrofů, tolikátá derivace se bude počítat, **pozor - neplatí zde tento zápis** $f^{(n)}$ **jako n-tá derivace!**

○ opět si uvedeme několik příkladů:

In[112]:=
```
D[x^4 - 3 x^2 + 10, {x, 3}]
```
Out[112]=
```
24 x
```
In[113]:=
```
f1[x_] := x^4 - 3 x^2 + 10; Derivative[3][f1][x]
```
Out[113]=
```
24 x
```
In[114]:=
```
f2[x_] := x^4 - 3 x^2 + 10; f2'''[x]
```
Out[114]=
```
24 x
```

1.5.2. Příklady

• Příklady k procvičení - derivujte následující funkce (podle proměnné ***x***), požadovaný řád je uveden v závorkách:

a) n1(x) = $x(2x-1)^2(x+3)^3$ (najděte 6. a 7. derivaci)

b) n2(x) = $\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ (najděte 3. derivaci)

c) n3(x) = $\sin^2 x \ln x$ (najděte 2. derivaci)

d) n4(x) = $\frac{\cos(3x)}{\sqrt[3]{1-3x}}$ (najděte 3. derivaci)

1.5.3. Výsledky

• Řešení:

a)

In[115]:=
```
D[x (2 x - 1)^2 (x + 3)^3, {x, 6}]
```
Out[115]=
```
2880
```
In[116]:=
```
n1[x_] := x (2 x - 1)^2 (x + 3)^3; Derivative[7][n1][x]
```

Out[116]=

```
0
```

b)

In[117]:=

```
n2[x_] := (1 + x) / Sqrt[1 - x]; Derivative[3][n2][x]
```

Out[117]=

$$\frac{9}{4\ (1-x)^{5/2}}+\frac{15\ (1+x)}{8\ (1-x)^{7/2}}$$

c)

In[118]:=

```
D[Sin[x]^2 Log[x], {x, 2}]
```

Out[118]=

$$\frac{4\,\text{Cos}[x]\,\text{Sin}[x]}{x}-\frac{\text{Sin}[x]^2}{x^2}+\text{Log}[x]\ \left(2\,\text{Cos}[x]^2-2\,\text{Sin}[x]^2\right)$$

d)

In[119]:=

$$\text{n4}[x\_] := \text{Cos}[3\,x] \Big/ \sqrt[3]{1-3\,x};\ \text{n4}'''[x]$$

Out[119]=

$$\frac{28\,\text{Cos}[3\,x]}{(1-3\,x)^{10/3}}-\frac{27\,\text{Cos}[3\,x]}{(1-3\,x)^{4/3}}-\frac{36\,\text{Sin}[3\,x]}{(1-3\,x)^{7/3}}+\frac{27\,\text{Sin}[3\,x]}{(1-3\,x)^{1/3}}$$

2. Diferenciální počet funkce dvou a více proměnných

2.1. Reálná funkce více reálných proměnných

2.1.1.

● Pro zopakování uveďme, že reálnou funkci jedné reálné proměnné definujeme jako:

f [prom_]:= výraz.

● Podobně budeme postupovat i u reálné funkce více proměnných, zápis bude vypadat takto:

funkce [prom$_1$_, prom$_2$ _, ..., prom$_n$_] := výraz

○ příklad:

In[120]:=
```
f[x_, y_] := (x - 2 y)^2
```

○ příklad:

In[121]:=
```
f[3, -1]
```

Out[121]=
```
25
```

○ příklad:

In[122]:=
```
f[x_, y_, z_, w_, q_] := x^y + z / w - q
```

In[123]:=
```
f[2, 3, 4, 2, 7]
```

Out[123]=
```
3
```

● Hodnoty pro více proměnných můžeme zadávat každou zvášť do vstupní buňky

In[124]:=
```
x1 = 1
```

Out[124]=
```
1
```

In[125]:=
```
x2 = 2
```

Out[125]=
```
2
```

In[126]:=
```
x3 = 3
```

Out[126]=
```
3
```

nebo jen do jedné vstupní buňky. K oddělení příkazů využijeme symbolu **;** (středník).

In[127]:=
```
x1 = 1; x2 = 2; x3 = 3
```

Out[127]=
```
3
```

● Použijeme-li středník za posledním výrazem, zabráníme tím, aby se nám zobrazilo výstupní pole.

In[128]:=
```
x1 = 3; x2 = 8; x3 = 5;
```

● Chceme-li přiřadit proměnným hodnoty pouze v jednom výrazu, použijeme podobného zápisu jako v případě jedné proměnné. Definici však musíme uzavřít do složených závorek:

In[129]:=
```
(x + y) * (x - y) ^2 /. {x → 3, y → 1 - a}
```

Out[129]=
$(4-a)\,(2+a)^2$

2.2. Parciální derivace prvního a vyšších řádů

2.2.1. Výpočet

● K výpočtu parciálních derivací používáme stejných funkcí jako v případě derivace reálné funkce jedné proměnné. Podívejme se nyní na obecný zápis těchto funkcí:

- ○ ∂_x **fce** nebo **D[fce, x]** — najde parciální derivaci funkce *fce* podle proměnné *x*
- ○ **D[fce, {x, n}]** nebo **Derivative[n][fce][x]** — najde parciální derivaci *n*-tého řádu funkce *fce* podle proměnné *x*.

● Nyní si uveďmě několik příkladů použití těchto funkcí:

○ příklad 1.

In[130]:=
```
∂z (x^3 - 12 z^4 y^3)
```

Out[130]=
$-48\,y^3\,z^3$

○ příklad 2.

In[131]:=
```
D[x^3 - 12 z^4 y^3, y]
```

Out[131]=
$-36\,y^2\,z^4$

○ příklad 3.

In[132]:=
```
Fz[z_] := x^3 - 12 z^4 y^3; Derivative[3][Fz][z]
```
Out[132]=
$-288\, y^3\, z$

- Nyní si uveďmě několik příkladů použití těchto funkcí (pokračování):
  - příklad 4.

In[133]:=
```
∂x,x (x^2 * y^2)
```
Out[133]=
$2\, y^2$

  - příklad 5.

In[134]:=
```
D[x^2 * y^2, x, y, x]
```
Out[134]=
$4\, y$

  - příklad 6.

In[135]:=
```
D[x^2 * y^2, {x, 2}, {y, 2}]
```
Out[135]=
4

  - příklad 7. - pro výpočet funkce (x^2 y^2) v bodě x = 2 musíme použít následujícího zápisu:

In[136]:=
```
D[x^2 * y^2, x] /. x → 2
```
Out[136]=
$4\, y^2$

2.2.2. Příklady

- Příklady k procvičení - najděte / vypočtěte následující parciální derivace:

a) $f(x, y) = 3x^2y + \sin(xy^2)$ (1. parciální derivaci (p.d.) podle *x* a 1.p.d. podle *y*)

b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x} + y^2$ (1. p.d. podle *x* a 1.p.d. podle *y*, v bodě c = [1, 5])

c) $f(x, y) = 2e^{-(x^2+y^2)}$ (2.p.d. podle *x*)

d) f(x, y) = $\frac{\ln(\frac{x}{y})}{x^2-y^2}$ (2.p.d. podle *x*,*y*)

e) f(x, y) = x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-3x^2y-y^3+x^4-4x^2y^2 (všechny 1., 2. a 3. parciální derivace)

2.2.3. Výsledky

• Řešení:

a)

In[137]:=
```
∂x (3 x^2 y + Sin[x y^2])
```
Out[137]=

$6\,x\,y + y^2\,\mathrm{Cos}[x\,y^2]$

In[138]:=
```
∂y (3 x^2 y + Sin[x y^2])
```
Out[138]=

$3\,x^2 + 2\,x\,y\,\mathrm{Cos}[x\,y^2]$

b)

In[139]:=
```
D[∛x y^2, x] /. x → 1
```
Out[139]=

$\frac{y^2}{3}$

In[140]:=
```
D[∛x y^2, y] /. y → 5
```
Out[140]=

$10\,x^{1/3}$

c)

In[141]:=
```
D[2 ⅇ^-(x^2+y^2), {x, 2}]
```
Out[141]=

$2\left(-2\,e^{-x^2-y^2} + 4\,e^{-x^2-y^2}\,x^2\right)$

d)

In[142]:=

$$D\left[\frac{\text{Log}\left[\frac{x}{y}\right]}{x^2-y^2},\ x,\ y\right]$$

Out[142]=

$$\frac{2\,x}{y\,(x^2-y^2)^2}+\frac{2\,y}{x\,(x^2-y^2)^2}-\frac{8\,x\,y\,\text{Log}\left[\frac{x}{y}\right]}{(x^2-y^2)^3}$$

e)

In[143]:=
```
D[x - y + x^2 + 2 x y + y^2 + x^3 - 3 x^2 y - y^3 + x^4 - 4 x^2 y^2, x]
```
Out[143]=

$1+2\,x+3\,x^2+4\,x^3+2\,y-6\,x\,y-8\,x\,y^2$

In[144]:=
```
D[x - y + x^2 + 2 x y + y^2 + x^3 - 3 x^2 y - y^3 + x^4 - 4 x^2 y^2, y]
```
Out[144]=

$-1+2\,x-3\,x^2+2\,y-8\,x^2\,y-3\,y^2$

In[145]:=
```
D[x - y + x^2 + 2 x y + y^2 + x^3 - 3 x^2 y - y^3 + x^4 - 4 x^2 y^2, {x, 2}]
```
Out[145]=

$2+6\,x+12\,x^2-6\,y-8\,y^2$

In[146]:=
```
D[x - y + x^2 + 2 x y + y^2 + x^3 - 3 x^2 y - y^3 + x^4 - 4 x^2 y^2, x, y]
```
Out[146]=

$2-6\,x-16\,x\,y$

In[147]:=
```
D[x - y + x^2 + 2 x y + y^2 + x^3 - 3 x^2 y - y^3 + x^4 - 4 x^2 y^2, {y, 2}]
```
Out[147]=

$2-8\,x^2-6\,y$

In[148]:=
```
D[x - y + x^2 + 2 x y + y^2 + x^3 - 3 x^2 y - y^3 + x^4 - 4 x^2 y^2, {x, 3}]
```
Out[148]=

$6+24\,x$

In[149]:=
```
D[x - y + x^2 + 2 x y + y^2 + x^3 - 3 x^2 y - y^3 + x^4 - 4 x^2 y^2, {x, 2}, y]
```
Out[149]=

$-6-16\,y$

In[150]:=
```
D[x - y + x^2 + 2 x y + y^2 + x^3 - 3 x^2 y - y^3 + x^4 - 4 x^2 y^2, x, {y, 2}]
```
Out[150]=

$-16\,x$

In[151]:=
```
D[x - y + x^2 + 2 x y + y^2 + x^3 - 3 x^2 y - y^3 + x^4 - 4 x^2 y^2, {y, 3}]
```

```
Out[151]=
        -6
```

2.3. Totální diferenciál prvního a vyšších řádů

2.3.1. Výpočet

■ pozn.: **Totální diferenciál není v *Mathematica CalcCenter* podporován.**

● K určení totálního diferenciálu pomocí programu *Mathematica* slouží funkce **Dt**.

● Syntaxe této funkce vypadá následovně:

○ **Dt [fce]** najde totální diferenciál funkce *fce*.
○ **Dt [fce, x]** zobrazí úplnou derivaci funkce *fce* podle proměnné *x*.
○ **Dt [fce, {x, n}]** zobrazí *n*-tou úplnou derivaci podle *x* ($d^n fce$ / d x^n).

○ příklad 1.

```
In[152]:=
        Dt[x y]
Out[152]=
        y Dt[x] + x Dt[y]
```

○ příklad 2.

```
In[153]:=
        Dt[x y, x]
Out[153]=
        y + x Dt[y, x]
```

● Z příkladu 2. je vidět, že proměnná *y* je fukcí proměnné *x*, tzn. $y = y(x)$.

○ příklad 3.

```
In[154]:=
        Dt[a x y, x, Constants → a]
Out[154]=
        a y + a x Dt[y, x, Constants → {a}]
```

● Pomocí parametru **Constans** můžeme definovat různé konstanty vyskytující se ve výrazu. Názornou ukázku tvoří příklad 3., ve kterém *a* je konstantou, $y = y(x)$ a *x* je nezávislá proměnná.

○ příklad 4.

In[155]:=
```
Dt[a x + b y, x, Constants → {a, b}]
```

Out[155]=
```
a + b Dt[y, x, Constants → {a, b}]
```

○ příklad 5.

In[156]:=
```
Dt[x^3, {x, 2}]
```

Out[156]=
```
6 x
```

○ příklad 6.

In[157]:=
```
Dt[x^3 y, {x, 2}]
```

Out[157]=

$6\,x\,y + 6\,x^2\,\mathrm{Dt}[y, x] + x^3\,\mathrm{Dt}[y, \{x, 2\}]$

- K zamyšlení: jaký je rozdíl mezi *x* a *y* v příkladech 7, 8 a 9 ? Řešení jistě najde každý sám.

○ příklad 7.

In[158]:=
```
Dt[x^3 y, x, y]
```

Out[158]=

$3\,x^2 + 6\,x\,y\,\mathrm{Dt}[x, y] + 3\,x^2\,\mathrm{Dt}[x, y]\,\mathrm{Dt}[y, x]$

○ příklad 8.

In[159]:=
```
Dt[x^3 y, x, y, Constants → x]
```

Out[159]=

$3\,x^2$

○ příklad 9.

In[160]:=
```
Dt[x^3 y, x, y, Constants → y]
```

Out[160]=

$3\,x^2 + 6\,x\,y\,\mathrm{Dt}[x, y, \mathrm{Constants} \to \{y\}]$

3. Integrální počet funkce jedné proměnné

3.1. Neurčitý integrál

3.1.1. Výpočet

● Pro výpočet neurčitého integrálu v prostředí *Mathematica* můžeme využít funkce **Integrate** nebo symbolického zápisu (tak, jak to známe z matematiky) nacházejícího se v nástrojové paletě:

○ funkce **Integrate** - syntaxe této funkce vypadá následovně: **Integrate[fce, prom]**
- *fce* je integravaná funkce a *prom* je proměnná podle níž integrujeme

○ symbolický zápis integrace: $\int \mathbf{fce}\, d\, x$

● Uveďmě si nekolik příkladů na tyto dva zápisy integrálů:

○ příklad 1.

In[161]:=

$$\int x^2\, dx$$

Out[161]=

$$\frac{x^3}{3}$$

○ příklad 2.

In[162]:=

$$\int (x\text{^}3 - 2\, x\, y)\, dx$$

Out[162]=

$$\frac{x^4}{4} - x^2\, y$$

○ příklad 3.

In[163]:=

```
Integrate[x^2, x]
```

Out[163]=

$$\frac{x^3}{3}$$

○ příklad 4.

```
In[164]:=
        Integrate[x^3 - 2 x y, x]
Out[164]=
```

$$\frac{x^4}{4} - x^2 y$$

○ příklad 5.

```
In[165]:=
        Integrate[x^3 - 2 x y + y^x, x]
Out[165]=
```

$$\frac{x^4}{4} - x^2 y + \frac{y^x}{\text{Log}[y]}$$

3.1.2. Příklady

● Příklady k procvičení - vypočtěte následující integrály:

a) $\int \left(x + \sqrt{x}\right) dx$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\, dx$

c) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$

d) $\int x \operatorname{arccotg}(x)\, dx$

e) $\int \frac{1}{\sin^2(3x)}\, dx$

f) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\, dx$

g) $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

h) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\, dx$

i) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}\, dx$

j) $\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\, dx$

k) $\int \sqrt[4]{\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^3}\, dx$

l) $\int \sin^5 x\, dx$

m) $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$

n) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} \, dx$

o) $\int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}} \, dx$

p) $\int \frac{9x-14}{9x^2-24x+16} \, dx$

q) $\int \frac{x^3-6x^2+10x-2}{(x-3)^2 (x^2-4x+5)} \, dx$

r) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}} \, dx$

s) $\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} \, dx$

3.1.3. Výsledky

• Řešení:

a)

In[166]:=

Integrate$[x + \sqrt{x}, x]$

Out[166]=

$$\frac{2 x^{3/2}}{3} + \frac{x^2}{2}$$

b)

In[167]:=

Integrate$[x\text{^}2 / \sqrt{x}, x]$

Out[167]=

$$\frac{2 x^{5/2}}{5}$$

c)

In[168]:=

$$\int \frac{x^2}{1 + x^2} \, dx$$

Out[168]=

x - ArcTan[x]

d)

In[169]:=

```
Integrate[x * ArcCot[x], x]
```

Out[169]=

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} x^2 \text{ArcCot}[x] - \frac{\text{ArcTan}[x]}{2}$$

e)

In[170]:=

$$\int \left(\frac{1}{\text{Sin}[3\,x]^2}\right) dx$$

Out[170]=

$$-\frac{1}{3} \text{Cot}[3\,x]$$

f)

In[171]:=

Integrate[Cos[x]^3 / Sin[x], x]

Out[171]=

$$\frac{1}{4} \text{Cos}[2\,x] + \text{Log}[\text{Sin}[x]]$$

g)

In[172]:=

$$\int \frac{\text{ArcCos}[x] - x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

Out[172]=

$$\sqrt{1 - x^2} - \frac{\text{ArcCos}[x]^2}{2}$$

h)

In[173]:=

Integrate[(2 x^2 - 3 x - 3) / ((x - 1) (x^2 - 2 x + 5)), x]

Out[173]=

$$\frac{1}{2} \text{ArcTan}\left[\frac{1}{2} (-1 + x)\right] - \text{Log}[-1 + x] + \frac{3}{2} \text{Log}[5 - 2\,x + x^2]$$

i)

In[174]:=

Integrate[1 / (x Sqrt[x^2 + 4 x - 4]), x]

Out[174]=

$$\frac{1}{2} \text{ArcTan}\left[\frac{-2 + x}{\sqrt{-4 + 4\,x + x^2}}\right]$$

j)

In[175]:=

Integrate[(x + 1) / ((2 x + x^2) Sqrt[2 x + x^2]), x]

Out[175]=

$$-\frac{1}{\sqrt{x\,(2 + x)}}$$

k)

In[176]:=

$$\text{Integrate}\left[\sqrt[4]{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^3},\ x\right]$$

Out[176]=

$$\frac{8}{77}\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\left(1+\sqrt{x}\right)^3\right)^{1/4}\left(-4+7\sqrt{x}\right)$$

l)

In[177]:=

$$\int \text{Sin}[x]^5\, dx$$

Out[177]=

$$-\frac{5\,\text{Cos}[x]}{8}+\frac{5}{48}\text{Cos}[3\,x]-\frac{1}{80}\text{Cos}[5\,x]$$

m)

In[178]:=

$$\int \text{Tan}[x]^3\, dx$$

Out[178]=

$$\text{Log}[\text{Cos}[x]]+\frac{\text{Sec}[x]^2}{2}$$

n)

In[179]:=

$$\text{Integrate}\left[\text{Sin}[x]\,\hat{}\,3\Big/\sqrt[3]{\text{Cos}[x]\,\hat{}\,4},\ x\right]$$

Out[179]=

$$\frac{3\,\text{Cos}[x]\left(5+\text{Cos}[x]^2\right)}{5\left(\text{Cos}[x]^4\right)^{1/3}}$$

o)

In[180]:=

$$\int \frac{e^x\sqrt{\text{ArcTan}[e^x]}}{1+e^{2x}}\, dx$$

Out[180]=

$$\frac{2}{3}\text{ArcTan}[e^x]^{3/2}$$

p)

In[181]:=

$$\int \frac{9\,x-14}{9\,x^2-24\,x+16}\, dx$$

Out[181]=

$$-\frac{2}{3\,(4-3\,x)}+\text{Log}[4-3\,x]$$

q)

In[182]:=

$$\int \frac{x^3 - 6\,x^2 + 10\,x - 2}{(x-3)^2\,(x^2 - 4\,x + 5)}\,dx$$

Out[182]=

$$-\frac{1}{2\,(-3+x)} - \frac{3}{2}\,\text{ArcTan}[2-x] + \frac{1}{2}\,\text{Log}\left[2 + 2\,(-3+x) + (-3+x)^2\right]$$

r)

In[183]:=

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{\text{Sin}[x]^3\,\text{Cos}[x]^5}}\,dx$$

Out[183]=

$$\frac{4\,\text{Cos}[x]\,\text{Sin}[x]}{\left(\text{Cos}[x]^5\,\text{Sin}[x]^3\right)^{1/4}}$$

s)

In[184]:=

$$\int \frac{1}{1+\text{Tan}[x]}\,dx$$

Out[184]=

$$\frac{1}{2}\,(x + \text{Log}[\text{Cos}[x] + \text{Sin}[x]])$$

3.2. Určitý integrál

3.2.1. Výpočet

• K výpočtu určitého integrálu užijeme podobných postupů jako v případě neurčitého integrálu, které jen zobecníme.

• Pro výpočet určitého integrálu opět využijeme funkce **Integrate** nebo symbolického zápisu (tak, jak to známe z matematiky) nacházejícího se v nástrojové paletě:

○ funkce **Integrate** - syntaxe této funkce vypadá následovně: **Integrate[fce, {x, xmin, xmax}]**

- *fce* je integravaná funkce, *x* je proměnná podle níž integrujeme a *xmin*, *xmax* jsou meze integrace

○ symbolický zápis integrace: $\int_{\text{xmin}}^{\text{xmax}} \text{fce}\,dx$

• Uveďmě si nekolik příkladů na tyto dva zápisy integrálů:

○ příklad 1.

In[185]:=

$$\int_1^3 x^2 \, dx$$

Out[185]=

$$\frac{26}{3}$$

○ příklad 2.

In[186]:=

$$\int_1^3 (x^3 - 2\,x\,y) \, dx$$

Out[186]=

$$20 - 8\,y$$

● Uveďmě si několik příkladů na tyto dva zápisy integrálů (pokračování):

○ příklad 3.

In[187]:=

```
Integrate[x^2, {x, 1, 3}]
```

Out[187]=

$$\frac{26}{3}$$

○ příklad 4.

In[188]:=

```
Integrate[x^3 - 2 x y, {x, 1, 3}]
```

Out[188]=

$$20 - 8\,y$$

○ příklad 5.

In[189]:=

```
Integrate[Cos[x / 2]^2, {x, 0, Pi}]
```

Out[189]=

$$\frac{\pi}{2}$$

3.2.2. Příklady

● Příklady k procvičení - vypočtěte následující určité integrály:

a) $\int_a^b x^2 \, dx$

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5\,x)^3} \, dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx$

d) $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} \, dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{6-5\cos x + \cos^2 x} \, dx$

f) $\int_{-1}^3 x \, e^{3-x^2} \, dx$

g) $\int_e^{e^2} 3x \ln x \, dx$

h) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

3.2.3. Výsledky

● Řešení:

a)

In[190]:=

```
Integrate[x^2, {x, a, b}]
```

Out[190]=

$$-\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}$$

b)

In[191]:=

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3} \, dx$$

Out[191]=

$$\frac{7}{72}$$

c)

In[192]:=

```
Integrate[Exp[2 x] Cos[x], {x, 0, Pi / 2}]
```

Out[192]=

$$\frac{1}{5}\left(-2 + e^{\pi}\right)$$

d)

In[193]:=

```
Integrate[Sqrt[2 x - x^2], {x, 0, 1}]
```

Out[193]=

$$\frac{\pi}{4}$$

e)

In[194]:=

```
Integrate[Sin[x] / (6 - 5 Cos[x] + Cos[x]^2), {x, 0, Pi / 2}]
```

Out[194]=

$$\text{Log}\left[\frac{4}{3}\right]$$

f)

In[195]:=

```
Integrate[x Exp[3 - x^2], {x, -1, 3}]
```

Out[195]=

$$\frac{-1 + e^8}{2\, e^6}$$

g)

In[196]:=

```
Integrate[3 x Log[x], {x, Exp[1], Exp[2]}]
```

Out[196]=

$$\frac{3}{4}\, e^2\, (-1 + 3\, e^2)$$

h)

In[197]:=

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Out[197]=

$$2\, (-1 + e)$$

4. Úvod do řešení diferenciálních rovnic

4.1. Diferenciální rovnice prvního a vyšších řádů

4.1.1. Výpočet

■ pozn.:**Funkce DSolve není v *Mathematica CalcCenter* podporována. I přesto je možné diferenciální rovnice v *Mathematica CalcCenter* rešit užitím funkce SolveODE.**

● Pro řešení diferenciálních rovnic n-tého řádu a soustavy diferenciálních rovnic se používá integrované funkce **DSolve**.

● Ukažme si nyní jednotlivé zápisy funkce **DSolve**:

○ DSolve[rce, y, x] řeší diferenciální rovnici *rce* pro závislou proměnnou *y* s nezávisle proměnnou *x*

○ DSolve[{rce, y[x0]= =x0, ...}, y, x] řeší diferenciální rovnici *rce* s počátečními podmínkami y[x0]==x0, ...

○ DSolve[{rce1, rce2, ...}, {y1, y2, ...}, x] řeší soustavu diferenciálních rovnic

● Syntaxe funkce **SolveODE** pro *Mathematica CalcCenter*.

○ SolveODE[rce, y, {x, xmin, xmax}] nalezne numerické řešení obyčejné diferenciální rovnice *rce* pro závislou proměnnou *y* s nezávisle proměnnou *x* v mezích od *xmin* po *xmax*.

○ SolveODE[rce, y, {x, xmin, xmax}, {t, tmin, tmax}] nalezne numerické řešení parciální diferenciální rovnice rce pro závislou proměnnou *y* s nezávisle proměnnou *x* v mezích od *xmin* po *xmax* a parametr *t* v mezích od *tmin* po *tmax*.

○ SolveODE[rce, {y1, y2, ...}, {x, xmin, xmax}] nalezne numerická řešení pro funkce y1, y2, ...

● Ukažme si několik příkladů použití funkce **DSolve**:

○ příklad 1.

In[198]:=
```
DSolve[y'[x] - y[x] == 0, y[x], x]
```
Out[198]=

$\{\{y[x] \to e^{x} C[1]\}\}$

○ příklad 2.

In[199]:=
```
DSolve[{y'[x] - y[x] == 0, y[0] == 1}, y[x], x]
```
Out[199]=

$\{\{y[x] \to e^{x}\}\}$

○ příklad 3.

In[200]:=
```
DSolve[{y''[x] + Tan[x] y'[x] == Sin[2 x], y[0] == 1, y'[0] == 1}, y[x], x]
```
Out[200]=

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{2} (2 - 2 x + 6 \mathrm{Sin}[x] - \mathrm{Sin}[2 x])\right\}\right\}$

○ příklad 4.

In[201]:=
```
DSolve[y''[x] + y'[x] == Sin[x], y[x], x]
```

Out[201]=

```
{{y[x] → C[2] + 1/2 (-2 ⅇ^-x C[1] - Cos[x] - Sin[x])}}
```

○ příklad 5.

In[202]:=

```
DSolve[{y'[x] - z[x] - x == 0, z'[x] + y[x] - 2*x == 0}, {y[x], z[x]}, x]
```

Out[202]=

```
{{y[x] → C[1] Cos[x] + C[2] Sin[x] + Cos[x] (Cos[x] + 2 x Cos[x] - 2 Sin[x] + x Sin[x]) +
    Sin[x] (2 Cos[x] - x Cos[x] + Sin[x] + 2 x Sin[x]),
  z[x] → C[2] Cos[x] - C[1] Sin[x] - Sin[x] (Cos[x] + 2 x Cos[x] - 2 Sin[x] + x Sin[x]) +
    Cos[x] (2 Cos[x] - x Cos[x] + Sin[x] + 2 x Sin[x])}}
```

● Někdy nám *Mathematica* zobrazí výsledek v né příliš pěkné podobě. V tomto případě pro zjednodušení výsledku můžeme použít speciální funkce **Simplify**. Její předpis je následující: **Simplify [výraz]**.

● Ukažme si použití funkce **Simplify** na předchozím příkladu č.5, zápis bude vypadat následovně:

○ příklad 6.

In[203]:=

```
Simplify[DSolve[{y'[x] - z[x] - x == 0, z'[x] + y[x] - 2*x == 0}, {y[x], z[x]}, x]]
```

Out[203]=

```
{{y[x] → 1 + 2 x + C[1] Cos[x] + C[2] Sin[x], z[x] → 2 - x + C[2] Cos[x] - C[1] Sin[x]}}
```

4.1.2. Příklady

● Příklady k procvičení:

a) y'' = -y, y = y(x)

b) $y' = \frac{y}{x}\,(1+\ln\frac{y}{x})$, y = y(x)

c) (x+2y) y' = 1, y = y(x), y(0) = -1

d) $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$, y = y(x)

e) $y' + y\,\mathrm{tg}(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, y = y(x)

f) $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\sin(x)$, y = y(x)

g) y' = z + x
z' = -y + 2x, y = y(x), z = z(x)

h) y' = z

z' = -y, y = y(x), z = z(x)

i) z' + z - 8y = 0
y' - z - y = 0, y = y(x), z = z(x)

j) w' = 2w - y - z
y' = 2w - y - 2z
z' = 2z - w + y, y = y(x), z = z(x), w = w(x)

4.1.3. Výsledky

• Řešení:

a)

In[204]:=
```
DSolve[y''[x] + y[x] == 0, y[x], x]
```
Out[204]=
```
{{y[x] → C[1] Cos[x] + C[2] Sin[x]}}
```

b)

In[205]:=

$$\text{DSolve}\left[y'[x] == \frac{y[x]}{x}\left(1 + \text{Log}\left[\frac{y[x]}{x}\right]\right),\ y[x],\ x\right]$$

Out[205]=

$$\left\{\left\{y[x] \to e^{e^{C[1]\,x}}\,x\right\}\right\}$$

c)

In[206]:=
```
DSolve[{(x + 2 y[x]) y'[x] == 1, y[0] == -1}, y[x], x]
```
```
InverseFunction::ifun :
 Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued inverses. More…

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some
   solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. More…
```
Out[206]=

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{2}\,(-2 - x)\right\}\right\}$$

d)

In[207]:=
```
Simplify[DSolve[y'[x] == 2 ((y[x] + 2) / (x + y[x] - 1))^2, y[x], x]]
```
```
Solve::tdep : The equations appear to involve the
   variables to be solved for in an essentially non-algebraic way. More…
```

Out[207]=

```
Solve[4 ArcTan[(-3 + x)/(2 + y[x])] + C[1] == 2 Log[2 + y[x]], y[x]]
```

$$\text{Solve}\left[4\,\text{ArcTan}\left[\frac{-3+x}{2+y[x]}\right]+C[1]==2\,\text{Log}[2+y[x]],\ y[x]\right]$$

e)

In[208]:=

```
DSolve[y'[x] + y[x] Tan[x] == 1 / Cos[x], y[x], x]
```

Out[208]=

```
{{y[x] → C[1] Cos[x] + Sin[x]}}
```

f)

In[209]:=

```
Simplify[DSolve[y''[x] - 2 y'[x] + 2 y[x] == 4 e^x Sin[x], y[x], x]]
```

Out[209]=

$$\{\{y[x]\to e^{x}\,((-2\,x+C[2])\,\text{Cos}[x]+C[1]\,\text{Sin}[x])\}\}$$

g)

In[210]:=

```
Simplify[DSolve[{y'[x] == z[x] + x, z'[x] == -y[x] + 2 x}, {y[x], z[x]}, x]]
```

Out[210]=

```
{{y[x] → 1 + 2 x + C[1] Cos[x] + C[2] Sin[x], z[x] → 2 - x + C[2] Cos[x] - C[1] Sin[x]}}
```

h)

In[211]:=

```
DSolve[{y'[x] == z[x], z'[x] == -y[x]}, {y[x], z[x]}, x]
```

Out[211]=

```
{{y[x] → C[1] Cos[x] + C[2] Sin[x], z[x] → C[2] Cos[x] - C[1] Sin[x]}}
```

i)

In[212]:=

```
Expand[DSolve[{z'[x] + z[x] - 8 y[x] == 0, y'[x] - z[x] - y[x] == 0}, {y[x], z[x]}, x]]
```

Out[212]=

$$\left\{\left\{z[x]\to\frac{1}{3}\,e^{-3x}\,(2+e^{6x})\,C[1]+\frac{4}{3}\,e^{-3x}\,(-1+e^{6x})\,C[2],\right.\right.$$
$$\left.\left.y[x]\to\frac{1}{6}\,e^{-3x}\,(-1+e^{6x})\,C[1]+\frac{1}{3}\,e^{-3x}\,(1+2\,e^{6x})\,C[2]\right\}\right\}$$

j)

In[213]:=

```
Simplify[DSolve[{w'[x] == 2 w[x] - y[x] - z[x], y'[x] == 2 w[x] - y[x] - 2 z[x],
   z'[x] == 2 z[x] - w[x] + y[x]}, {y[x], z[x], w[x]}, x]]
```

Out[213]=

$$\{\{w[x]\to e^{x}\,((1+x)\,C[1]-x\,(C[2]+C[3])),$$
$$y[x]\to e^{x}\,(C[2]+2\,x\,(C[1]-C[2]-C[3])),\ z[x]\to e^{x}\,(C[3]+x\,(-C[1]+C[2]+C[3]))\}\}$$

5. Použitá literatura

- Základy práce v prostředí *Mathematica*, Ing. Bronislav Chramcov
  (Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Zlín, 2005)

- http://www.wolfram.com
  (Homepage of Wolfram Research, Inc.)

- http://documents.wolfram.com/mathematica/Mathematica_V5_Book.zip
  (Stephen Wolfram's The *Mathematica* Book, in pdf (cca 24 MB))

- http://documents.wolfram.com/calccenter
  (Html dokumentace k *Mathematica CalcCenter)*

- Sbírka řešených příkladů z matematiky, Doc. RNDr. František Jirásek CSc., Doc. Ing. Eduard Kriegelstein, Ing. Zdeněk Tichý
  (SNTL / ALFA, Praha, 1982)

- Příklady z matematiky pro fyziky III., Jiří Kopáček a kol.
  (MATFYZPRESS MFF UK, Praha 1996)