Proseminář z matematiky pro fyziky

Mgr. Jan Říha, Ph.D.
e-mail: riha@prfnw.upol.cz
http://www.ictphysics.upol.cz/Proseminar/index.html

Katedra experimentální fyziky
Přírodovědecká fakulta UP Olomouc

4. Úvod do řešení diferenciálních rovnic

4.1 Pojem diferenciální rovnice

Diferenciální rovnicí nazýváme rovnici

$$\boxed{F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0}$$

popřípadě zapisujeme $$\boxed{F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0}$$

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Řešením diferenciální rovnice nazýváme každou funkci $y = f(x)$, která je definovaná na množině $M \subset R$, má na M spojité derivace $y' = f'(x), y'' = f''(x), \dots, y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ a která splňuje rovnici $F\left[x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)\right] = 0.$

Obecným řešením diferenciální rovnice nazýváme funkci $y = f\left(x, C_1, C_2, \dots, C_n\right)$, která je řešením dané diferenciální rovnice a obsahuje n libovolných parametrů $C_1, C_2, \dots, C_n \in R$.

Partikulárním řešením diferenciální rovnice označíme řešení s určitou volbou parametrů $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Jestliže má rovnice další řešení, které není obsaženo v obecném řešení, nazýváme jej **singulárním řešením diferenciální rovnice.**

Cauchyho úloha

Diferenciální rovnice + cauchyovské počáteční podmínky

$$\boxed{\begin{aligned}&F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0,\\&y\left(x_0\right) = y_0,\ y'\left(x_0\right) = y_0',\ y''\left(x_0\right) = y_0'', \dots,\ y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)}.\end{aligned}}$$

kde $x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)} \in R$

4.2 Řešení základních typů diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\boxed{y' = F(x, y)}$$

- **Rovnice se separovatelnými proměnnými**

$$\boxed{P(x) + Q(y)y' = 0}$$

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C,\ C \in R$$

- **Homogenní rovnice**

$$\boxed{y' = F\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Substitucí $u = \dfrac{y}{x}$ převedeme na tvar rovnice se separovatelnými proměnnými

$$\frac{du}{F(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

◆ Lineární rovnice

$$\boxed{y' + p(x)y = g(x)}$$

Nejprve řešíme lineární rovnici bez pravé strany, tj. $g(x) = 0$:

$$y' + p(x)y = 0 \quad \searrow$$

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$$

K Řešení lineární rovnice s pravou stranou, tj. $g(x) \neq 0$ použijeme tzv. metodu variace konstanty. Tzn., že zavedeme místo konstanty C funkci $\alpha(x)$:

$$y = \alpha(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} \xrightarrow{\text{Dosadíme}} \boxed{y' + p(x)y = g(x)}$$

$$\text{odtud} \quad \alpha(x) = \int g(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$\text{obecné řešení:} \quad y = \left(\int g(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C\right)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$$

Úlohy

1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $\left(x + xy^2\right)y' - 3 = 0$.
2. Určete partikulární řešení diferenciální rovnice $xy' - y + y^2 = 0$
   s počátečními podmínkou $y\left(2\right) = 2$.
3. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $xy' = x - y$.
4. Řešte Cauchyho úlohu $2xy' + y - 3x = 0$, $y\left(1\right) = 2$.
5. Řešte Cauchyho úlohu $xy' + y = \cos x$, $y\left(\pi\right) = 1$.
6. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x^2 y' + y^2 = 0$.
7. Najděte obecné řešení rovnice $y' - \dfrac{\cos x}{\sin x} y = \mathrm{e}^x \sin x$
   na intervalu $\left(k\pi, \left(k+1\right)\pi\right)$, $k \in N$.
8. Řešte Cauchyho úlohu $y' - \dfrac{3}{x} y = x^4 \mathrm{e}^{-x^2}$, $y\left(1\right) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

4.3 Řešení diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty**

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x)}$$

Nejprve řešíme homogenní rovnici (bez pravé strany), tj. $f(x) = 0$:

$$y'' + py' + qy = 0$$

Sestavíme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Kořeny charakteristické rovnice: α_1, α_2

Obecné řešení homogenní rovnice závisí na tvaru kořenů α_1, α_2:

$$\alpha_1, \alpha_2 \in R \rightarrow y = C_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\alpha_2 x}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \in R \rightarrow y = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x} + C_2 x \mathrm{e}^{\alpha x}$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \in C, \alpha_1 = a + ib, \alpha_2 = a - ib$$

$$\rightarrow y = C_1 \mathrm{e}^{ax} \cos bx + C_2 \mathrm{e}^{ax} \sin bx$$

obecné řešení souhrnně: $\boxed{y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x)}$

K Řešení lineární rovnice s pravou stranou, tj. $f(x) \neq 0$ použijeme tzv. metodu variace konstant. Tzn., že zavedeme místo konstant C_1, C_2 funkce $C_1(x), C_2(x)$. Funkce $C_1(x), C_2(x)$ splňují podmínky :

$$C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0,$$
$$C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x).$$

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x)}$$

$$\boxed{y = C_1(x, K_1)\varphi_1(x) + C_2(x, K_2)\varphi_2(x)}$$

- **Cauchyho úloha**

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0'.}$$

Úlohy

1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ a řešte poté Cauchyho úlohu pro počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
2. Řešte diferenciální rovnice
a) $y'' + 4y' + 4y = 0$,
b) $y'' + 2y' + 5y = 0$,
c) $y'' + y' - 2y = 0$,
d) $y'' + 2y' = 0$.
3. Řešte diferenciální rovnice
a) $y'' + 4y = 2x^2 - x$,
b) $y'' + 2y' = x$,
c) $y'' - 2y' + y = (x+1)\mathrm{e}^{2x}$
d) $y'' - y = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$