Proseminář z matematiky pro fyziky

Mgr. Jan Říha, Ph.D.
e-mail: riha@prfnw.upol.cz
http://www.ictphysics.upol.cz/Proseminar/index.html

Katedra experimentální fyziky
Přírodovědecká fakulta UP Olomouc

3. Integrální počet reálné funkce jedné reálné proměnné

3.1 Primitivní funkce, neurčitý integrál

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu (a,b). Říkáme, že funkce $F(x)$ definovaná na intervalu (a,b) je **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$, jestliže $\forall x \in (a,b)$ platí : $F'(x) = f(x)$.

Pozn. : Derivace konstanty je nula, proto k dané funkci lze přiřadit nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se vzájemně liší o aditivní konstantu. Množinu všech primitivních funkcí nazýváme **neurčitý integrál** :

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

$c \in R$ .... integrační konstanta

Výpočet neurčitého integrálu

◆ Základní integrály

$$\int dx = x + c,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

1) $n \in N, x \in R,$

2) $n \in Z, n \neq -1, x \in (a,b), 0 \notin (a,b),$

3) $n \in R, n \neq -1, x > 0.$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,$$

$x \in (0,\infty)$ nebo $x \in (-\infty,0),$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$

$a > 0, a \neq 1$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

Základní integrály

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}x + c, \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{cotg}x + c, \qquad x \neq k\pi, k \in Z$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c, \qquad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}x + c = -\mathrm{arccotg}x + c.$$

Neurčitý integrál součtu funkcí a reálného násobku funkce

Jestliže $\int f_1(x)dx = F_1(x) + c$ a $\int f_2(x)dx = F_2(x) + c$, pak

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = F_1(x) + F_2(x) + c,$$

$$\int kf_2(x)dx = k\int f_2(x)dx = kF_1(x) + c, \forall k \in R.$$

- ## Metoda per partes

$$\boxed{\begin{aligned}&\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx,\\ &\int uv'dx = uv - \int u'vdx\end{aligned}}$$

- ## Substituční metoda

Nechť funkce $F(t)$ je primitivní funkcí k funkci $F(t)$ v intervalu (α, β) a nechť funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu (a, b), přičemž $\forall x \in (a, b)$ je $t = \varphi(x) \in (\alpha, \beta)$. Pak na intervalu (a, b) platí

$$\boxed{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + c.}$$

- ## Rozklad lomené funkce na parciální zlomky

Funkce typu $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Úlohy

1. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx,$
2. $\int \left(x^2+3\right)^2 dx,$
3. $\int \frac{x^3+1}{x+1}dx,$
4. $\int \operatorname{cotg}^2 x dx,$
5. $\int \left(2\cos x + x^3\sqrt{3} - \frac{5}{1+x^2}\right)dx,$
6. $\int \frac{(x-1)^2}{x^3}dx,$
7. $\int x^2 \sin x dx,$
8. $\int \ln x dx\,,$
9. $\int \cos^2 x dx,$
10. $\int 3^x\left(2+\frac{3^{-x}}{x^4}\right)dx\,,$
11. $\int \sin(\ln x)dx,$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\,,$

Úlohy

13. $\int \cos\left(-2t+\frac{\pi}{3}\right)dt$,

14. $\int \sin\left(3t-\frac{\pi}{3}\right)dt$,

15. $\int A\mathrm{e}^{\omega t+\varphi}dt$, $A,\omega \in R^{+}$,

16. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx,$

17. $\int \frac{x^3}{1+2x^4}dx,$

18. $\int x\sin\left(x^2+1\right)dx,$

19. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx,$

20. $\int \arcsin x dx,$

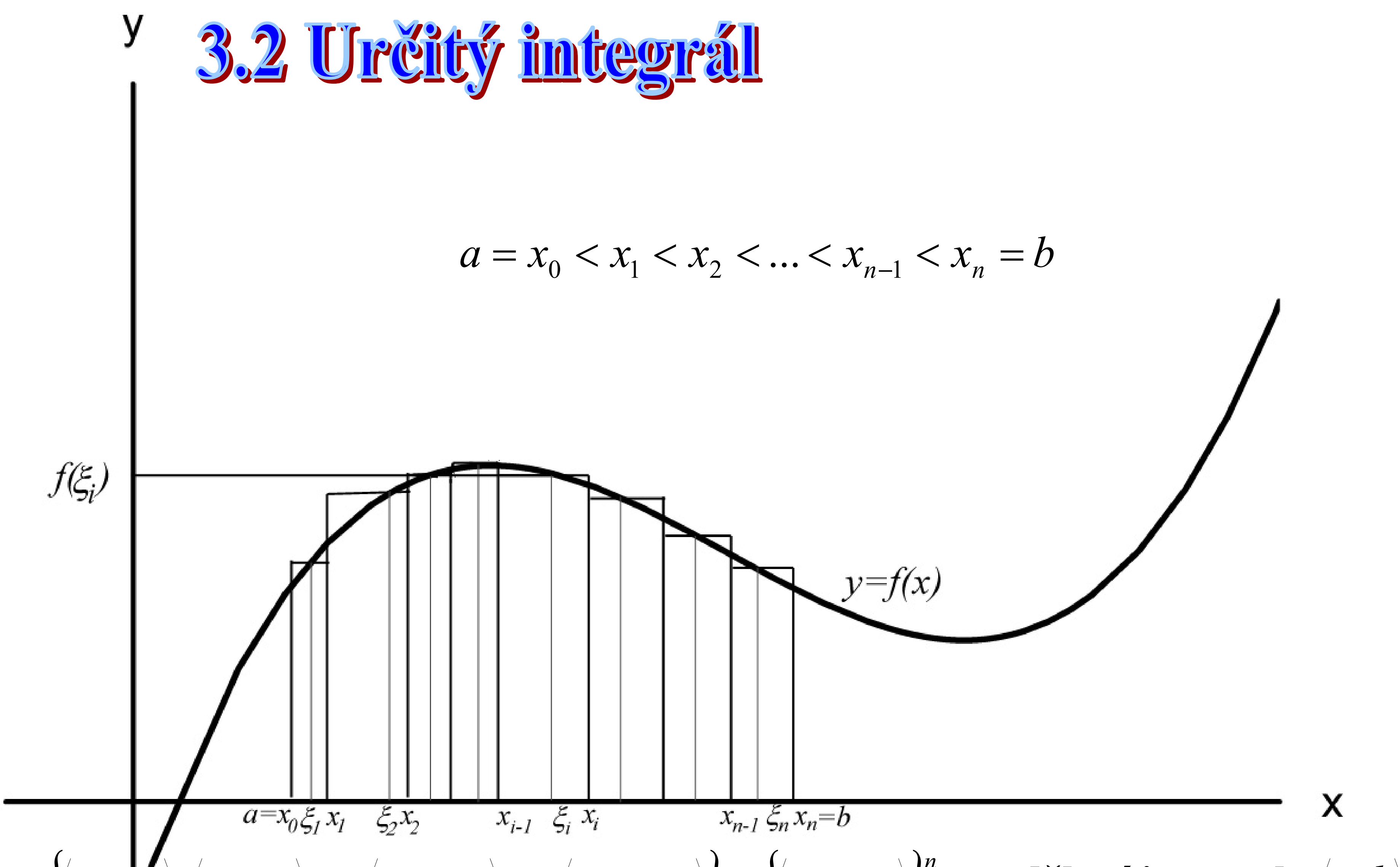
21. $\int \mathrm{e}^{ax}\cos x dx,$ kde $a \in R$,

22. $\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}dx,$

23. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{cotg} x}}{\sin^2 x}dx,$

24. $\int \frac{\mathrm{e}^x dx}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}},$

3.2 Určitý integrál



$D = \{\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{i-1}, x_i\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle\} = \{\langle x_{i-1}, x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ **...dělení intervalu** $\langle a, b\rangle$

$\nu D = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_i - x_{i-1}, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ **...norma dělení intervalu** $\langle a, b\rangle$

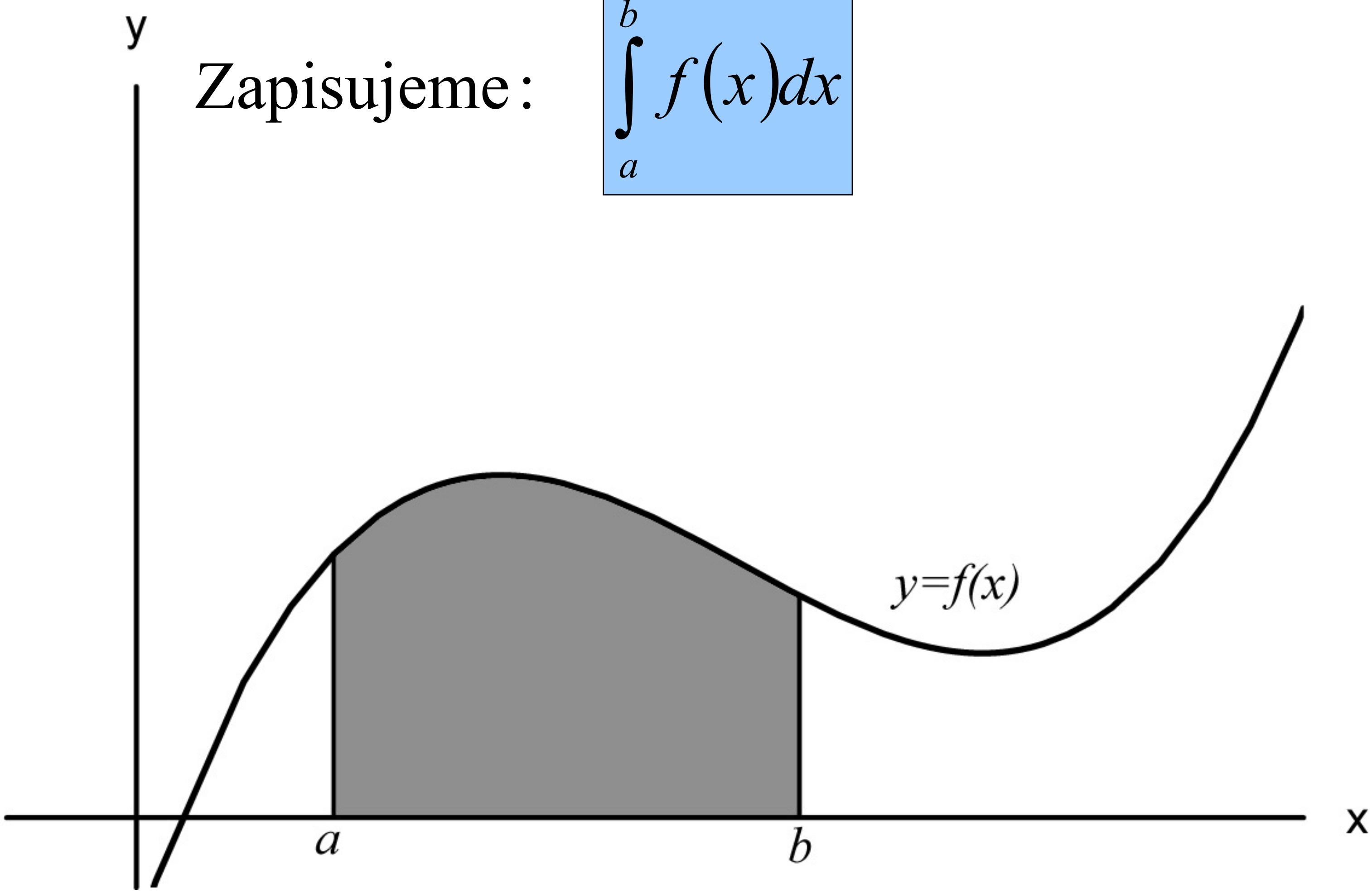
$\varphi[D, f(x)] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ **...integrální součet funkce** $f(x)$ **s dělením** D

Existuje - li vlastní limita $\lim\limits_{vD \to 0} \varphi[D, f(x)]$,

pak ji nazýváme **určitý integrál funkce** $f(x)$ od a do b,

funkci $f(x)$ nazýváme **integrovatelnou** na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Zapisujeme: $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$



3.3 Výpočet určitého integrálu

- **Vlastnosti určitých integrálů**

Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou integrovatelné funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, $\alpha \in R$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$$

Nechť existuje $c \in R$, $a < c < b$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Newtonova-Leibnitzova metoda

Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a $F(x)$ je primitivní funkcí k $f(x)$ na $\langle a,b\rangle$,

pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Metoda per partes

Nechť $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace $u'(x)$, $v'(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Metoda substituce

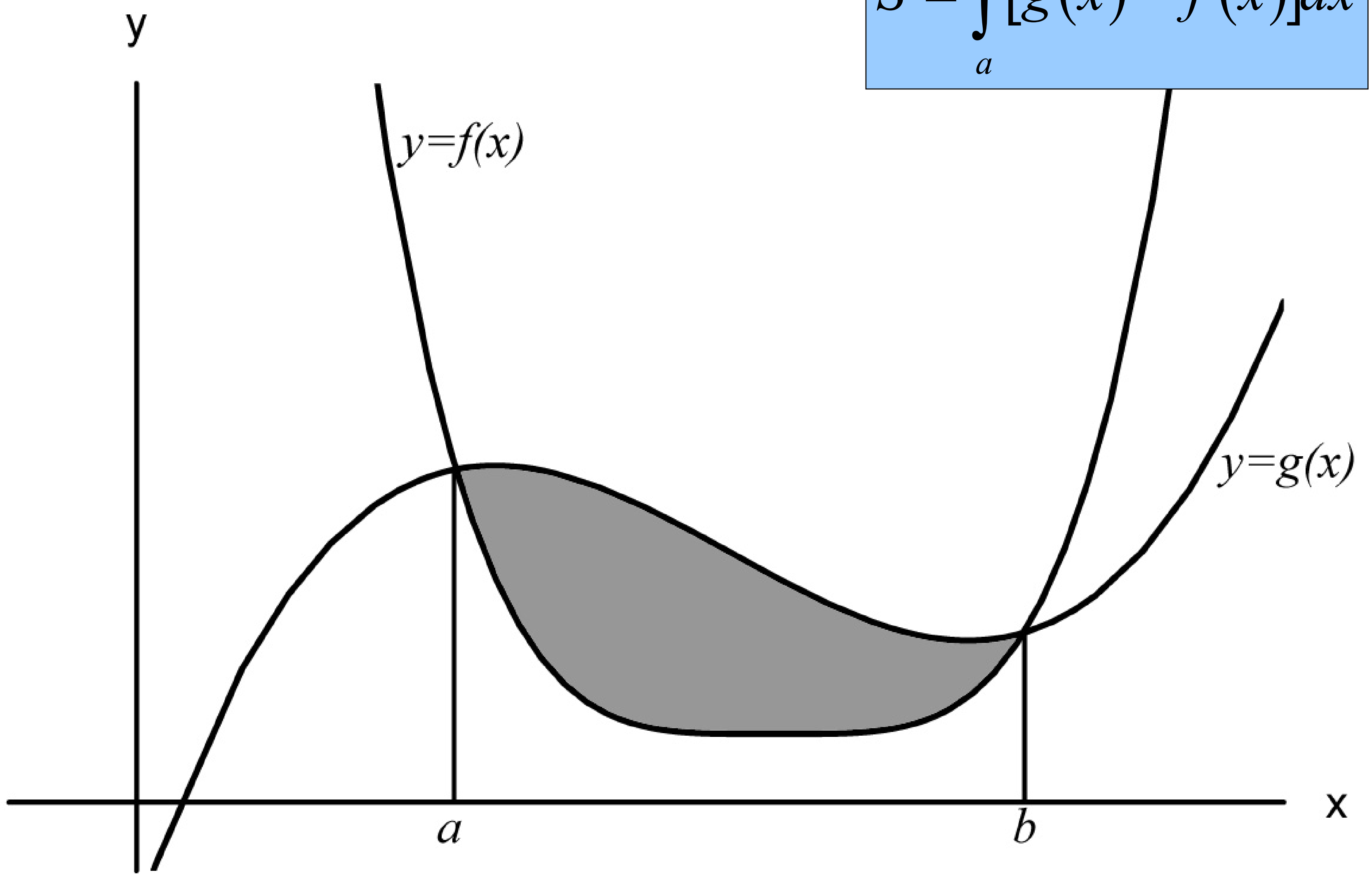
$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

$$t = \varphi(x),\ dt = \varphi'(x)dx,\ \alpha = \varphi(a),\ \beta = \varphi(b)$$

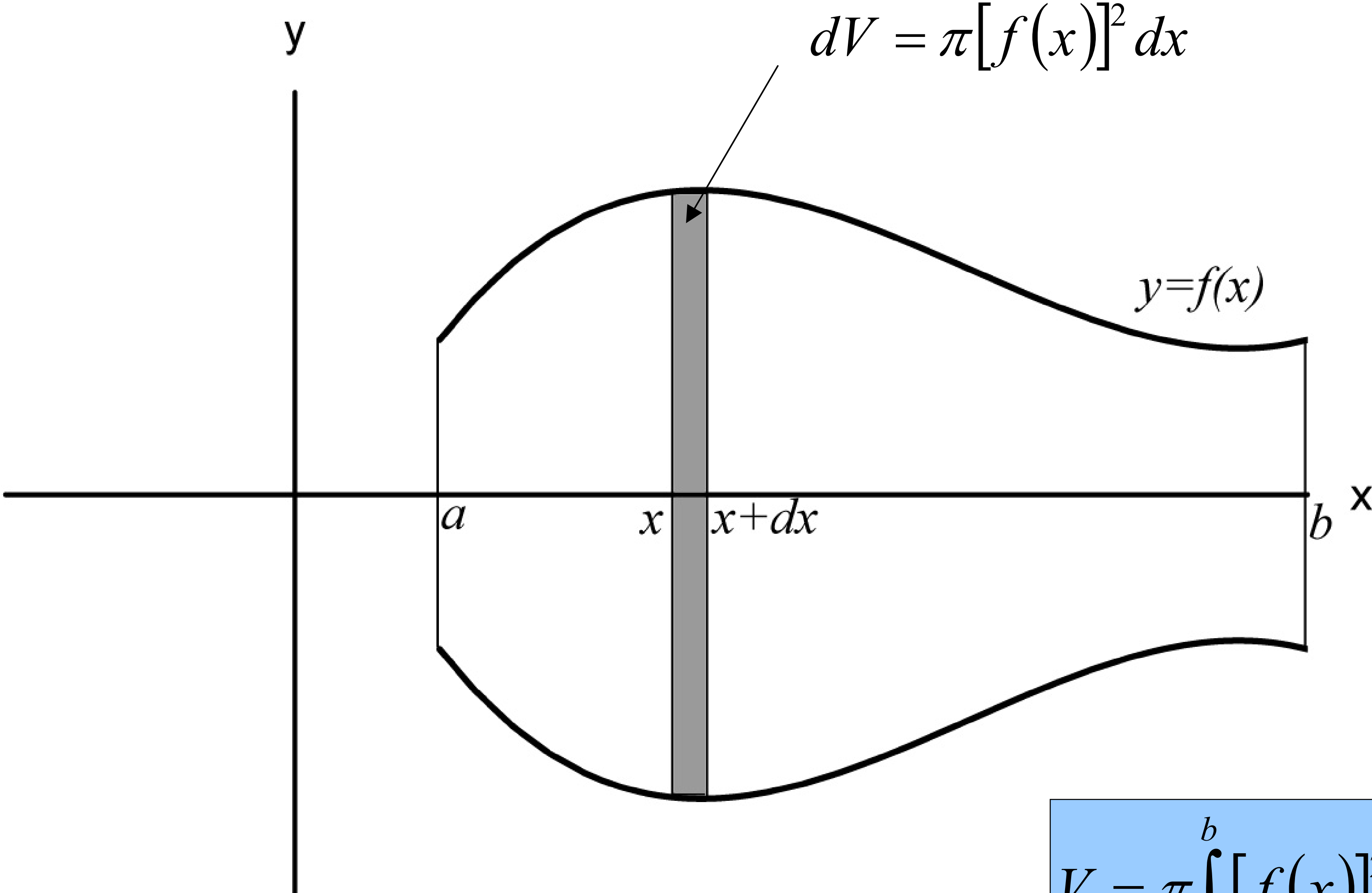
3.4 Využití určitého integrálu

- **Výpočet obsahu rovinných obrazců**

$$S=\int_a^b \left[g(x)-f(x)\right]dx$$



◆ Výpočet objemu rotačních těles



$$dV = \pi\left[f\left(x\right)\right]^2 dx$$

$$V = \pi\int_a^b \left[f\left(x\right)\right]^2 dx$$

Úlohy

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$,
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$,
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$,
4. $\int_0^a \left(x^2 - ax\right) dx, \quad a \in R$
5. $\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{\mathrm{x}} dx$,
6. $\int_{-1}^1 x^3 \mathrm{e}^{-3\mathrm{x}} dx$,
7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx$,
8. $\int_0^{\pi} x^3 \sin 2x dx$,
9. $\int_0^2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \sin \frac{\pi}{2} x dx$,

Úlohy

10. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$,

11. $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \sin\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)dx$,

12. Určete obsah plochy ohraničené grafy funkcí $y = \frac{5}{2} - x$, $y = \frac{1}{x}$.

13. Určete obsah plochy ohraničené grafy funkcí $y = \sin^3 x$, $y = \cos^3 x$ a přímkou $x = 0$.

14. Vypočítejte plochu omezenou čarami $y = 6x - x^2$, $y = 0$.

15. Zjistěte objem rotačního tělesa, které vzniklo otáčením sinusoidy v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ kolem osy x.

16. Zjistěte objem rotačního tělesa, které vzniklo otáčením obrazce omezeného čarami $y^2 = 2px$ a $x = h$, $p > 0, h \neq 0$.

17. Určete střední hodnotu I_S střídavého proudu v průběhu poloviny periody.

18. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx.$