Proseminář z matematiky pro fyziky

Mgr. Jan Říha, Ph.D.
e-mail: riha@prfnw.upol.cz
http://www.ictphysics.upol.cz/Proseminar/index.html

Katedra experimentální fyziky
Přírodovědecká fakulta UP Olomouc

2. Diferenciální počet reálné funkce více reálných proměnných

2.1 Reálná funkce více reálných proměnných

Reálnou funkcí dvou reálných proměnných rozumíme předpis, podle něhož je každému prvku množiny $M \subset R^2$ přiřazen právě jeden prvek množiny $N \subset R$.

Definiční obor funkce $M = D(f)$

Obor hodnot funkce $N = H(f)$

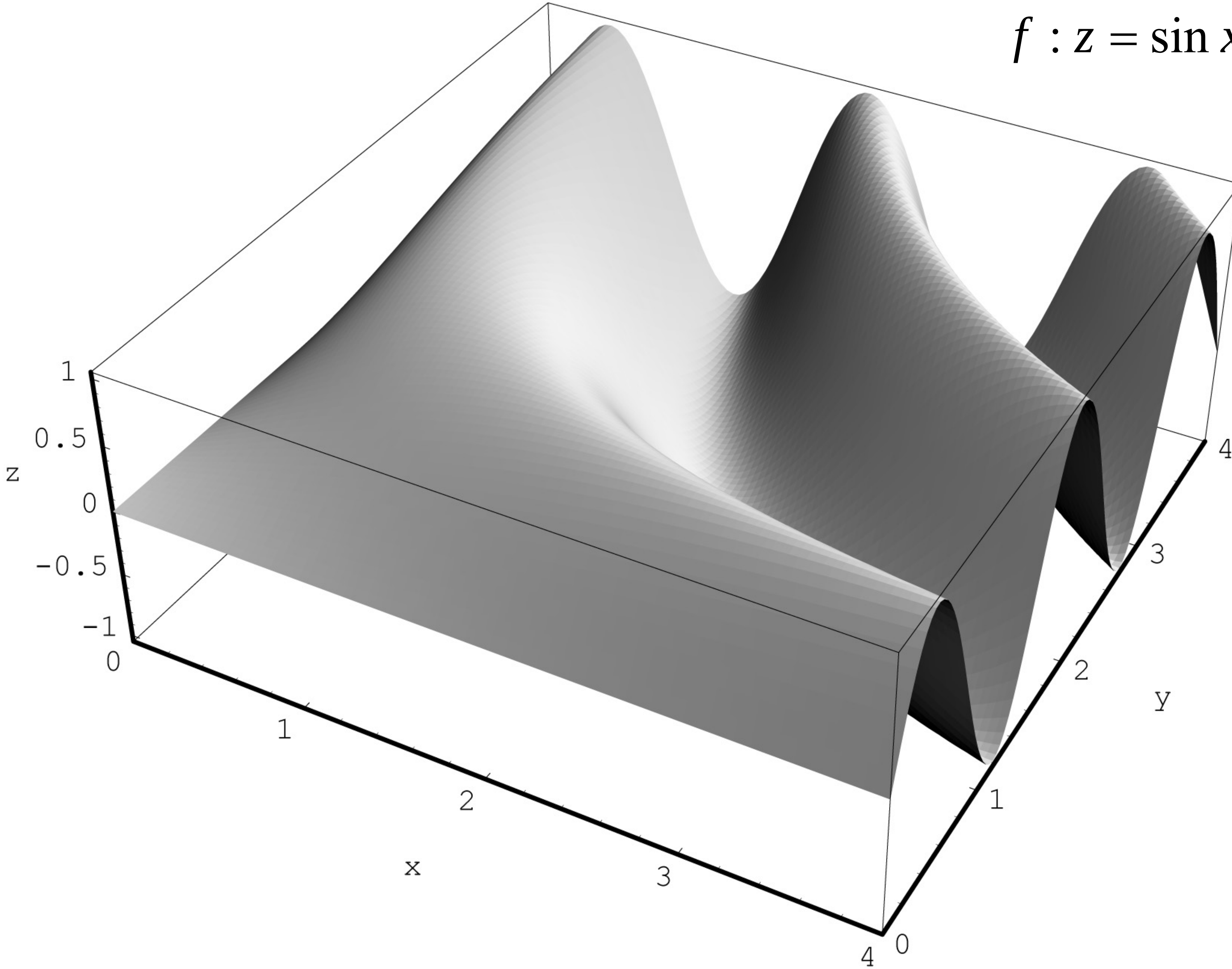
Zápis : $f : z = f(x, y)$

Reálnou funkcí více (n) **reálných proměnných** rozumíme předpis, podle něhož je každému prvku množiny $M \subset R^n$ přiřazen právě jeden prvek množiny $N \subset R$.

Zápis : $f : z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

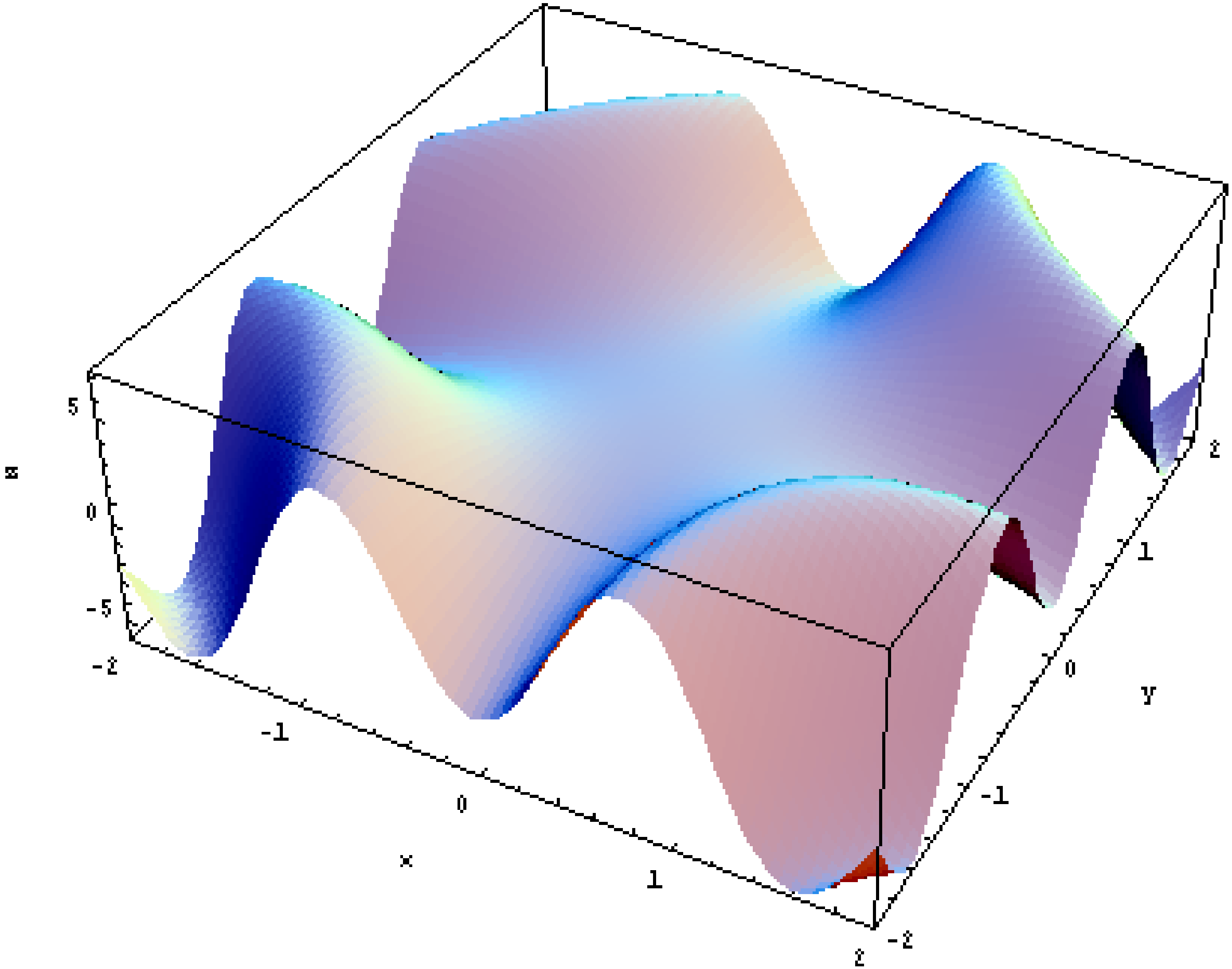
Příklady funkcí dvou proměnných

$f: z = \sin xy$



Příklady funkcí dvou proměnných

$$f : z = -x^2 - y^2 + 10 - 9\cos^2 xy$$



2.2 Parciální derivace

Definice parciální derivace

Je – li funkce definovaná v bodě (x_0, y_0) a nějakém jeho okolí a existuje - li vlastní limita

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}},$$

pak se tato limita nazývá **parciální derivací funkce** f **v bodě** (x_0, y_0)

podle proměnné *x*, označujeme $f_x'(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$

- **Obdobně parciální derivace podle druhé proměnné a pro funkce více proměnných**
- **Parciální derivace vyšších řádů**
- **Parciální derivace na množině**

2.3 Totální diferenciál

U funkcí dvou proměnných se udává přírůstek funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) vzhledem k tečné rovině.

Totální diverenciál :

$$\boxed{dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy}$$

Úlohy

1. Proveďte všechny parciální derivace funkce $\psi(x,t)$ až do 2. řádu,
   $$\psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\omega t - kx + \varphi},\ A, \omega, k, \varphi \in R^+,$$

2. Určete obě parciální derivace funkce $f(x,y)$ 1. řádu,
   $$f(x,y) = x^{\sin y},\ x > 0.$$

3. Proveďte všechny parciální derivace funkce $f(x,y)$ až do 2. řádu,
   $$f(x,y) = x^y.$$

4. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y)$ až do 3. řádu
   $$f(x,y) = xy^3 + \sin xy.$$

5. Proveďte všechny parciální derivace funkce $\psi(x,t)$ až do 2. řádu,
   $$\psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi),\ A, \omega, k, \varphi \in R^+,$$

6. Proveďte všechny parciální derivace funkce $\psi(x,t)$ až do 2. řádu,
   $$\psi(x,t) = 5\sin\left(2t - x + \frac{\pi}{2}\right), \text{ v bodě } \left(0, \frac{\pi}{4}\right),$$