Proseminář z matematiky pro fyziky

Mgr. Jan Říha, Ph.D.

e-mail: riha@prfnw.upol.cz

http://www.ictphysics.upol.cz/Proseminar/index.html

Katedra experimentální fyziky

Přírodovědecká fakulta UP Olomouc

1.3 Derivace funkce jedné proměnné

Fyzikální význam

Přímočarý pohyb - dráha funkcí času $s = s(t)$

v čase t_0 : $s_0 = s(t_0)$, v čase t_1 : $s_1 = s(t_1)$;

za dobu $\Delta t = t_1 - t_0$ urazí dráhu $\Delta s = s_1 - s_0 = s(t_1) - s(t_0)$.

Rovnoměrný přímočarý pohyb : veličina $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ určuje

okamžitou rychlost hmotného bodu během pohybu.

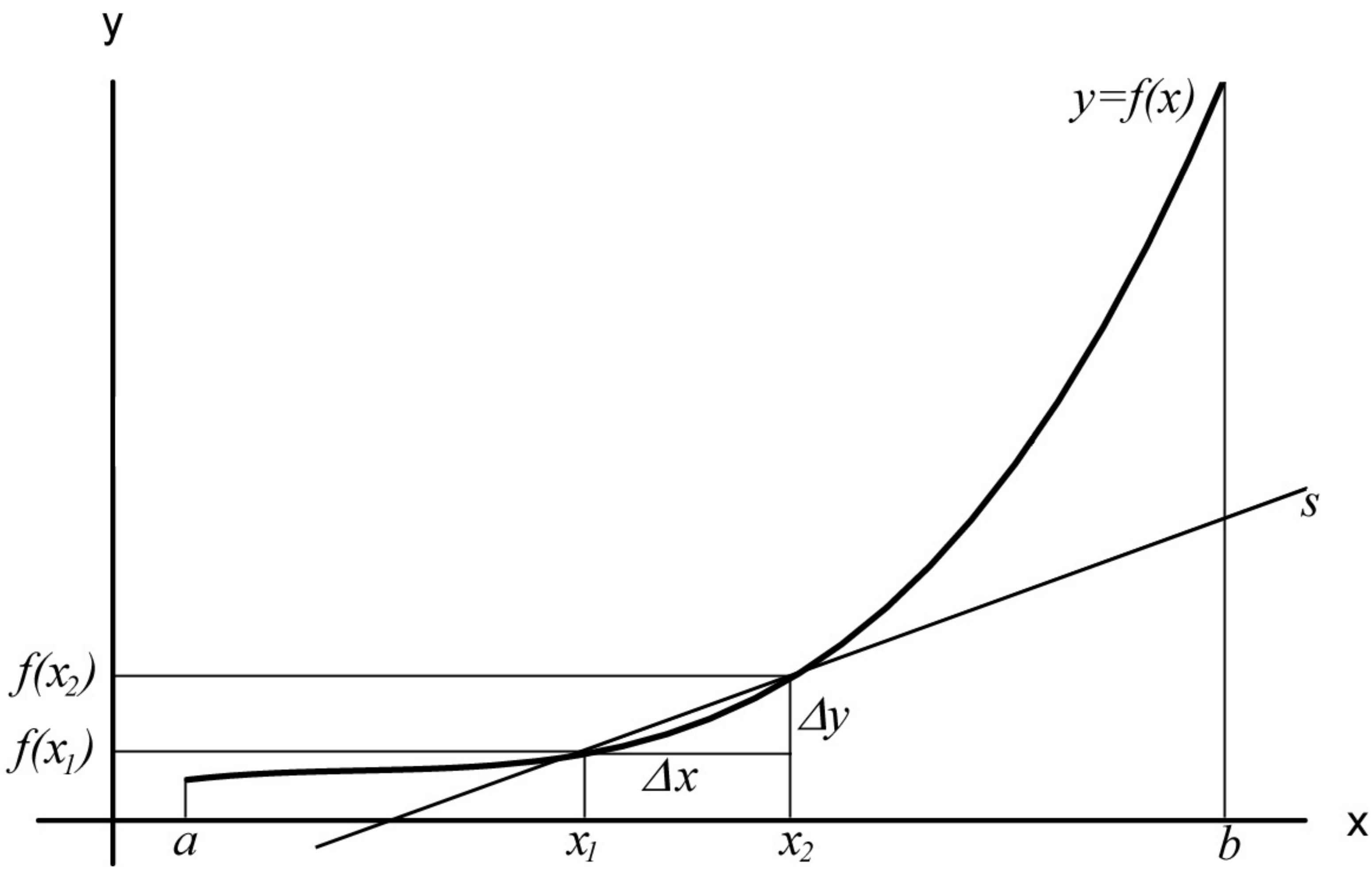
Nerovnoměrný přímočarý pohyb : veličina $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ určuje

průměrnou rychlost hmotného bodu během pohybu v době Δt.

Okamžitá rychlost v čase t je dána limitním přechodem

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.}$$

Geometrický význam



Směrnice sečny grafu funkce je podle obrázku

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Geometrický význam

Limitním přechod určuje směrnici tečny ke grafu funkce v bodě x_0

$$\boxed{k_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Definice derivace

Je – li funkce definovaná v bodě x_0 a nějakém jeho okolí a existuje - li vlastní limita

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},}$$

pak se tato limita nazývá **derivací funkce f v bodě** x_0, označujeme $f'(x_0)$

Výpočet derivace funkce

Derivace součtu, součinu a podílu funkcí

Nechť funkce $u(x), v(x)$ mají na nějakém intervalu derivace $u'(x), v'(x)$:

$$[u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x),$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

$$[ku(x)]' = ku'(x), \quad k \in R,$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Derivace racionálních funkcí

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \; n \in Q.$$

Derivace složené funkce

Nechť je funkce $u(x)$ proměnné x derivovatelná na intervalu (a,b) s hodnotami na intervalu (α, β) a funkce $f(u)$ proměnné u derivovatelná na intervalu (α, β). Složená funkce $y = f[u(x)]$ proměnné x je potom derivovatelná na intervalu (a,b), přičemž platí

$$\{f[u(x)]\}' = u'(x) f'(u)$$

Výpočet derivace funkce

- **Derivace goniometrických a cyklometrických funkcí**

$$(\sin x)' = \cos x,$$
$$(\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$(\mathrm{cotg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2},$$
$$(\mathrm{arccotg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

- **Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí**

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,$$
$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

Využití logaritmické derivace : funkce $y = [u(x)]^{v(x)} = u^v$, pak $$y' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

Výpočet derivace funkce

- **Derivace hyperbolických funkcí**

$$(\sinh x)' = \cosh x,$$
$$(\cosh x)' = \sinh x,$$
$$(\mathrm{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x},$$
$$(\mathrm{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Derivace vyšších řádů

- **Derivace druhého řádu**

$$[f'(x)]' = f''(x)$$

- **Derivace *n*-tého řádu**

$$\left[f^{(n-1)}(x)\right]' = f^{(n)}(x)$$

Úlohy

1. Stanovte derivaci f' a její definiční obor:

a) $f(x) = 7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 2x$,

b) $f(x) = (x^3 + 7x^2 - 9x + 5)^4$,

c) $f(x) = \dfrac{4x+5}{(x^3 + 7x - 8)^2}$,

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}$,

e) $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2 + 2}\sqrt[3]{x^3 + 3}$,

f) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$,

g) $f(t) = 3\mathrm{e}^{2t}$,

h) $f(t) = -3t\mathrm{e}^{5t+1}$,

i) $f(t) = 5\sin\left(2\mathrm{t} + \dfrac{\pi}{3}\right)$,

j) $f(t) = -\dfrac{1}{2}\cos\left(-\mathrm{t} - \dfrac{\pi}{2}\right)$,

k) $f(t) = A\sin(\omega \mathrm{t} - \varphi)$, $A, \omega, \varphi \in R^+$,

Úlohy

m) $f(t) = -A\mathrm{e}^{\omega t+\varphi}$, $A, \omega, \varphi \in R^+$,

n) $f(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)$, $A, \omega, \varphi, \gamma \in R^+$.

o) $f(x) = 2^{-x^2}$,

p) $f(x) = \mathrm{e}^{-\cos^2 x}$,

q) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,

r) $f(x) = 5\sin^2 x - 2\cos x^3$,

s) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$,

t) $f(x) = \sqrt[x]{x}$,

u) $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}$,

v) $f(x) = \sqrt{1+2x-x^2} - \arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$,

w) $f(x) = \ln(x^2+x+1) + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$,

x) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$.

Úlohy

2. Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 2$, je-li

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$,

b) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

3. Stanovte druhou derivaci funkce $f(x)$ a její definiční obor:

a) $f(x) = \mathrm{tg}x$,

b) $f(x) = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$,

c) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

d) $f(t) = \mathrm{A}\sin(\omega \mathrm{t} + \varphi),\ A, \omega, \varphi \in R^+$,

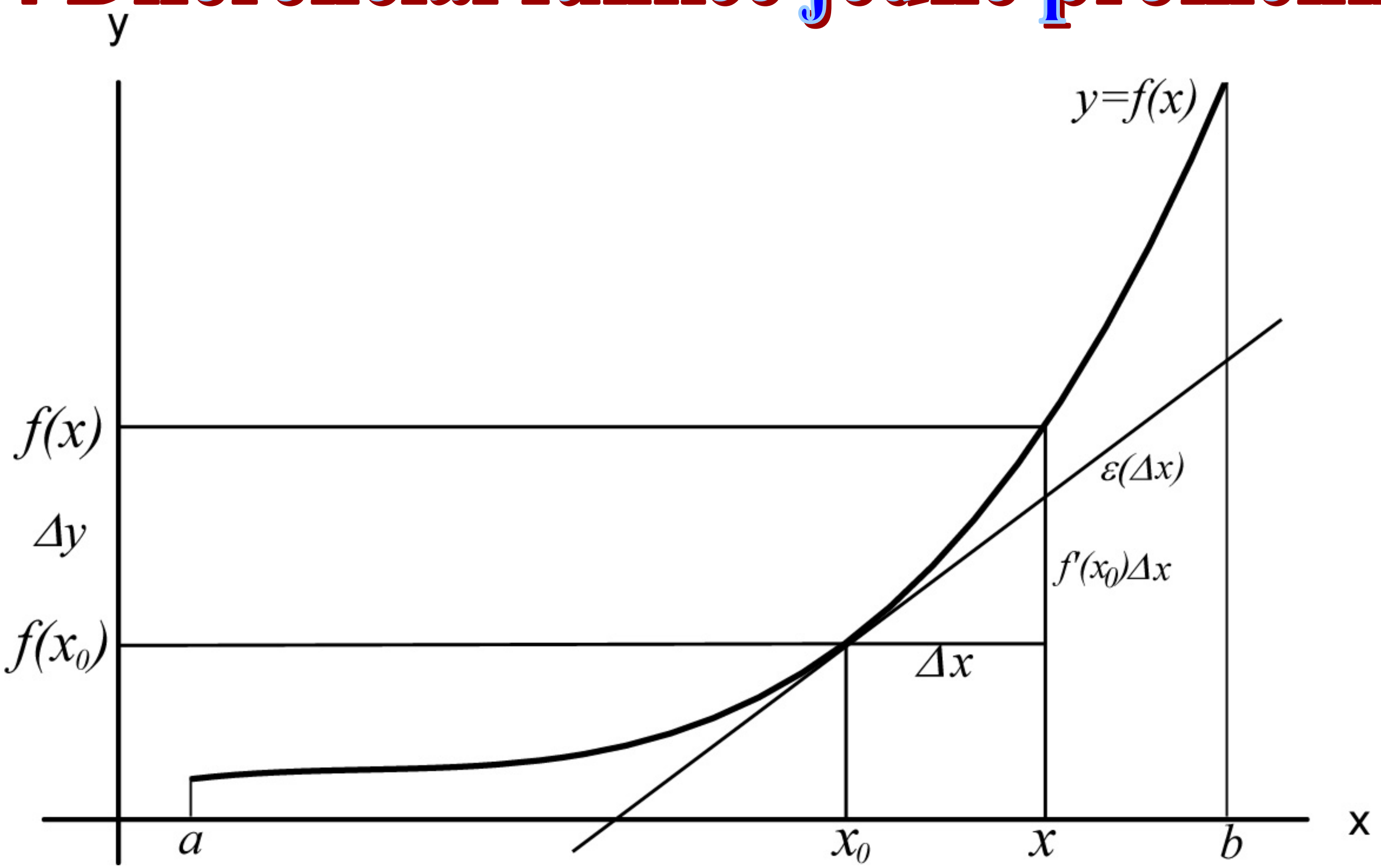
e) $f(t) = \mathrm{A}\cos(2\omega \mathrm{t} - \varphi),\ A, \omega, \varphi \in R^+$,

f) $f(t) = A\mathrm{e}^{-5\omega \mathrm{t} + \varphi},\ A, \omega, \varphi \in R^+$,

g) $f(t) = 7\mathrm{e}^{3\omega \mathrm{t}},\ \omega \in R^+$

h) $f(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi),\ A, \omega, \varphi, \gamma \in R^+$.

1.4 Diferenciál funkce jedné proměnné



Přírůstek funkce $f(x)$ odpovídající přírustku argumentu $\Delta x = x - x_0$ proměnné x v bodě x_0 :

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

Existuje - li derivace $f'(x_0)$:

$$\boxed{\Delta y = \Delta f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\textbf{Diferenciál funkce } f(x) \text{ v bodě } x_0} + \varepsilon(\Delta x),}$$

kde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$

Fyzikální význam

Stanovujeme veličinu y ze známé závislosti $y = f(x)$. Přitom jsme veličinu x získali měřením s maximální odchylkou Δx.

- **Absolutní chyba:** $$\boxed{\varepsilon = \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x}$$

- **Relativní chyba:** $$\boxed{\delta = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)}}$$

Úlohy

1. Vypočítejte přibližně

a) $\ln 10{,}01$, když víte, že $\ln 10 = 2{,}30259$

b) $\sqrt{16{,}06}$,

2. Měřením byl zjištěn poloměr koule $r = 2\ \text{cm}$ s maximální odchylkou $0{,}01\,\text{cm}$.
Jaké maximální chyby se dopustíme při výpočtu

a) objemu

b) povrchu