Proseminář z matematiky pro fyziky

Mgr. Jan Říha, Ph.D.
e-mail: riha@prfnw.upol.cz
http://www.ictphysics.upol.cz/Proseminar/index.html

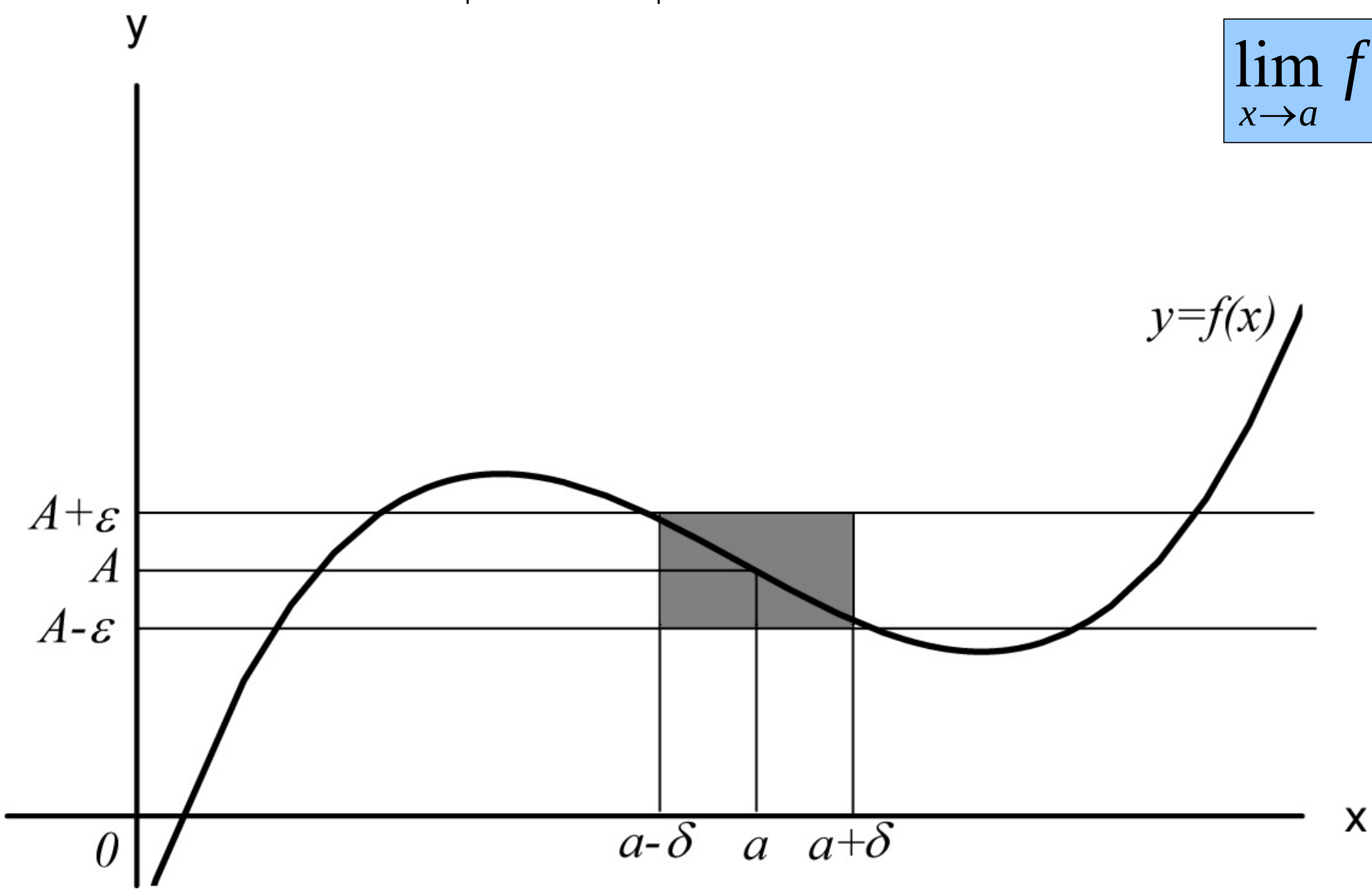
Katedra experimentální fyziky
Přírodovědecká fakulta UP Olomouc

1.2 Limita funkce

Vlastní (konečná) limita ve vlastním bodě

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A, jestliže $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:$
$x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

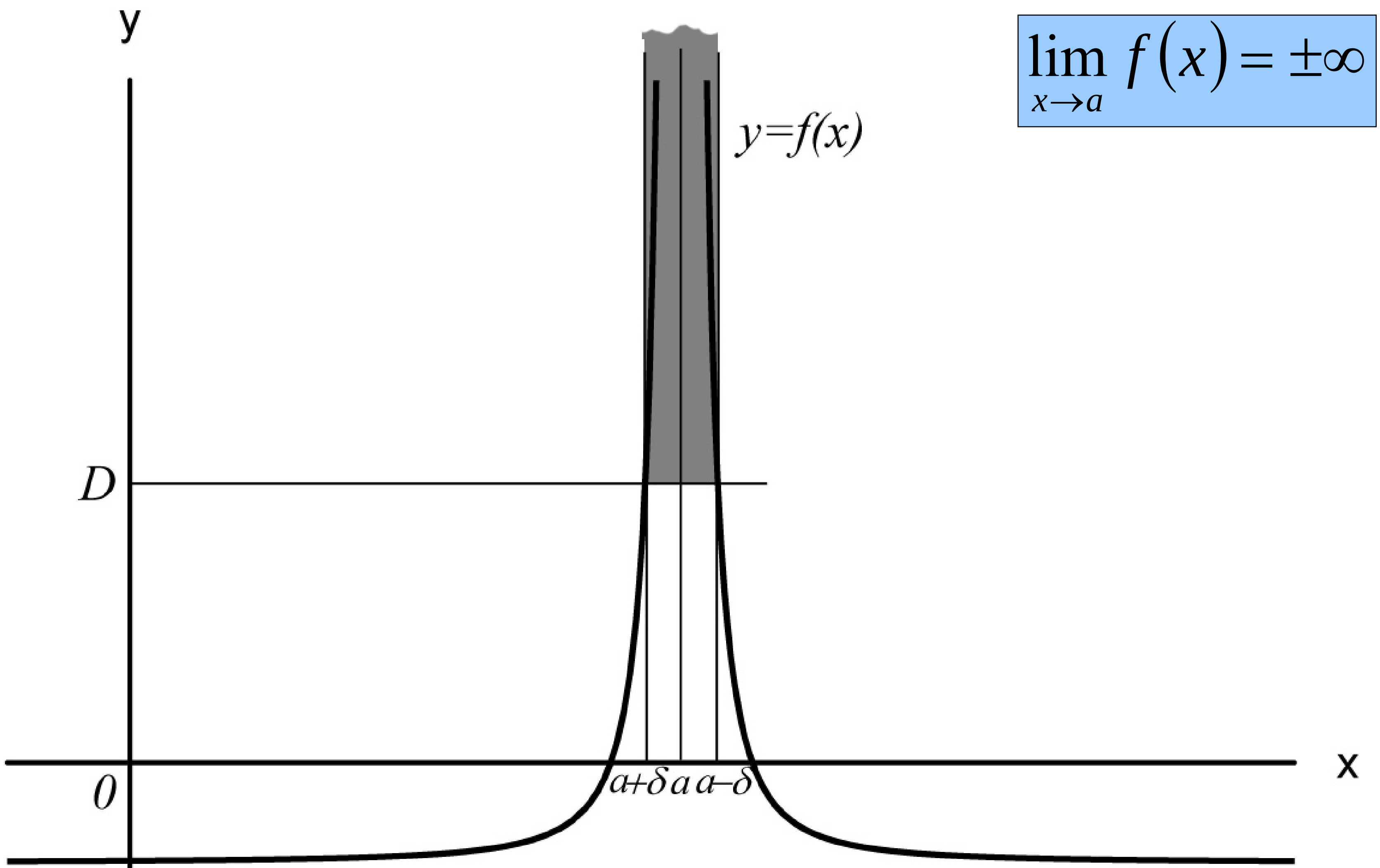


Nevlastní (nekonečná) limita ve vlastním bodě

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu $+\infty$ (popř. $-\infty$), jestliže

$\forall D \in R\, \exists \delta > 0 : x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) > D$, (popř. $f(x) < D$).

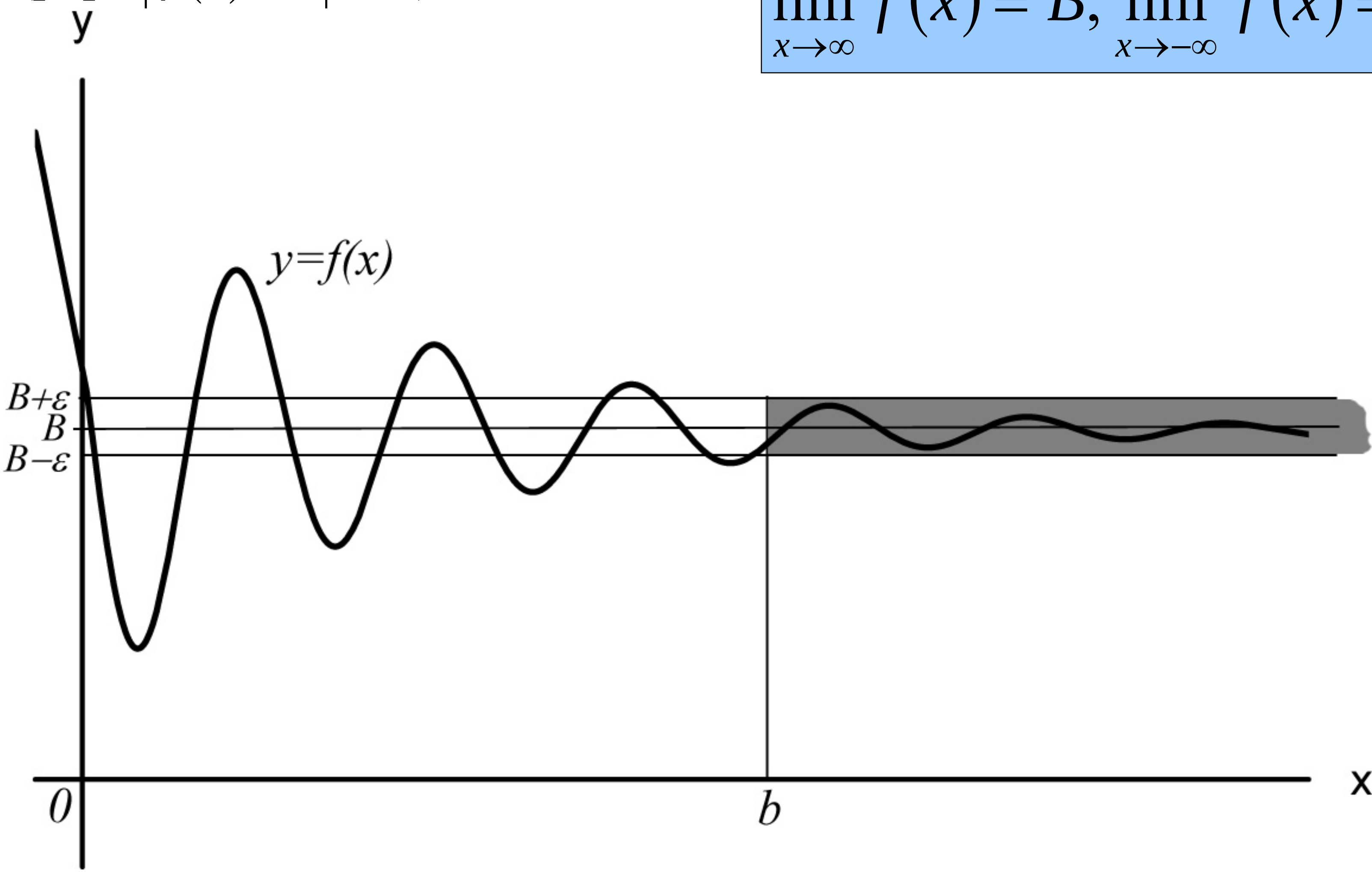
$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$



Vlastní limita v nevlastním bodě

Řekneme, že funkce $f(x)$ má pro $x \to \infty$ (popř. $x \to -\infty$) limitu B (popř. C), jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists b \in R$ (popř. $c \in R$) $: x > b$ (popř. $x < c$) $\Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$ (popř. $|f(x) - C| < \varepsilon$).

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = B,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = C$$

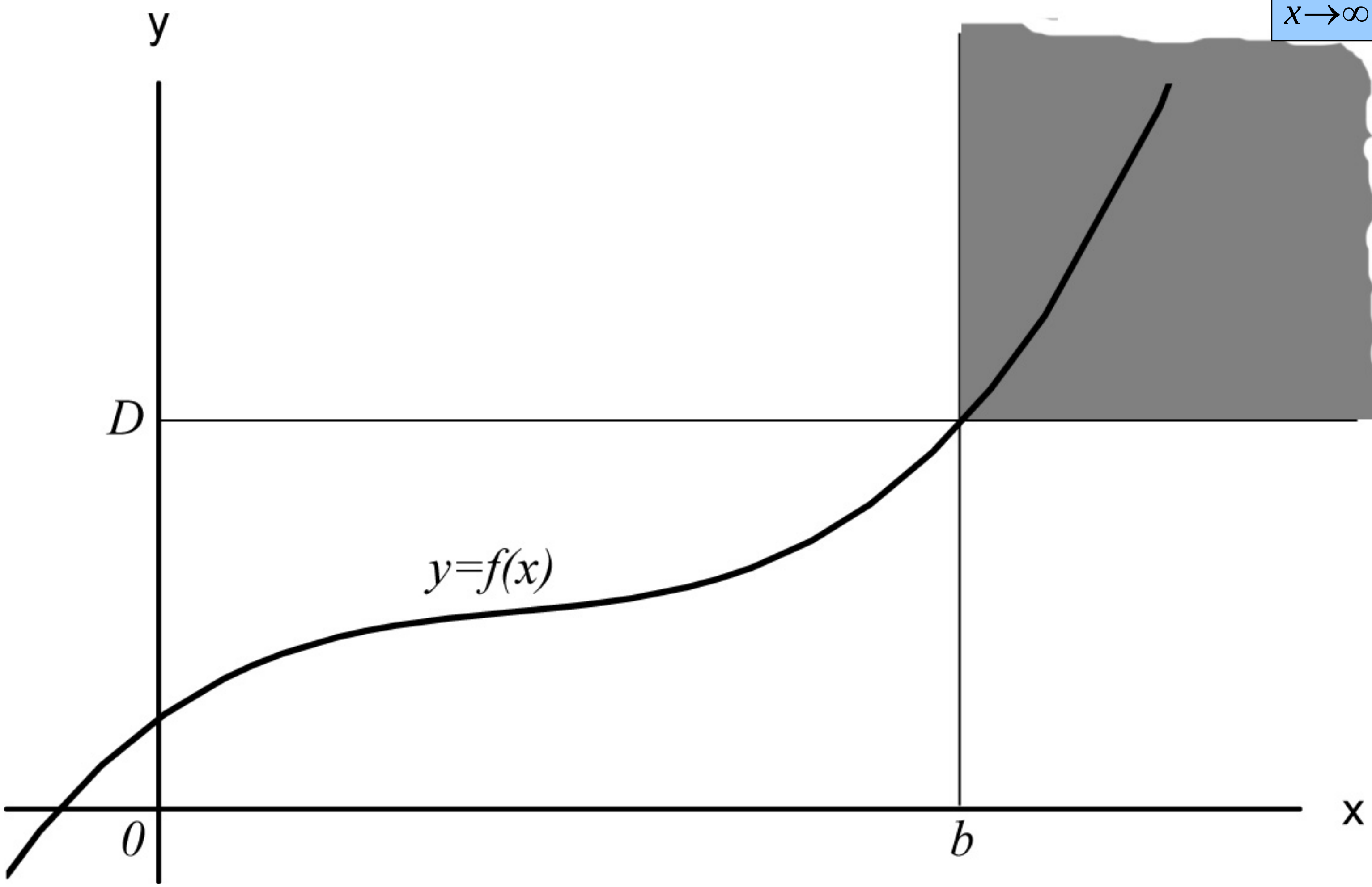


Nevlastní limita v nevlastním bodě

Řekneme, že funkce $f(x)$ má pro $x \to \infty$ limitu ∞, jestliže

$\forall D \in R\, \exists b \in R : x > b \Rightarrow f(x) > D.$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$



Funkce $f(x)$ se nazývá **spojitá v bodě** a, jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Výpočet limity funkce

- Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu

- Nechť $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x) = B$, pak

  $$\lim_{x\to c} |f(x)| = |A|,$$

  $$\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B,$$

  $$\lim_{x\to c} [f(x) g(x)] = AB,$$

  $$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ pro } B \neq 0.$$

- **Přehled často užívaných limit**

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0,\ \ n \in Q^+,$$

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{x} = 1,$$

Výpočet limity funkce

- **Přehled často užívaných limit**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x} = \infty.$$

Úlohy

1. Vyšetřete limity

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^4-1}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{6}{1-x^3}\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}-1}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 6x}$,

g) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg} 3x}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tgx\ -\ sinx}}{\sin^3 x}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tgx\ -\ sinx}}{x^3}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+x}-1}$,

k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2+\sqrt{x^3+2}}{x^2-x+1}$,

l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$.