Proseminář z matematiky pro fyziky

Mgr. Jan Říha, Ph.D.
e-mail: riha@prfnw.upol.cz
http://www.ictphysics.upol.cz/Proseminar/index.html

Katedra experimentální fyziky
Přírodovědecká fakulta UP Olomouc

Podmínky zisku zápočtu

- neúčast nejvýše na třech seminářích
- psát 3 písemné práce (asi dvacetiminutové, každá s maximálním ziskem 10 bodů)
- zisk nejméně 20 bodů
- každou písemku napsat alespoň na 3 body
- odevzdat vyřešené domácí úlohy

Doporučená literatura

- BRABEC J., HRŮZA B.: *Matematická analýza II*. SNTL, Praha, 1989.
- BRABEC J., MARTAN F., ROZENSKÝ Z.: *Matematická analýza I*. SNTL, Praha, 1989.
- JIRÁSEK F., ČIPERA S., VACEK M.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky I., II. a III.*. SNTL, Praha, 1989.
- LEA S. M.: *Mathematics for Physicists.* Brooks/Cole, 2004.
- KUČERA J., HORÁK Z.: *Tenzory v elektrotechnice a ve fyzice*. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1963.
- KVASNICA J.: *Matematický aparát fyziky*. Academia, Praha, 1989.
- ČECHOVÁ M., MARKOVÁ L.: *Proseminář z matematiky A, B*. UP Olomouc, 1990.
- KOLESÁROVÁ A., KOVÁČOVÁ M., ZÁHONOVÁ V.: *Matematika I - Návody na cvičenia s programovým systémom Mathematica.* Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2004.
- KOLESÁROVÁ A., KOVÁČOVÁ M., ZÁHONOVÁ V.: *Matematika II - Návody na cvičenia s programovým systémom Mathematica.* Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2002.
- ZIMMERMAN, R. L., OLNES, F. I.: *Mathematica for Physics.* Addison-Wesley, 2002.
- WOLFRAM S.: *The Mathematica Book.* Wolfram Media, 2003.
- BAUMANN G.: *Mathematica for Theoretical Physics.* Springer-Verlag Heidelberg, 1993.
- DICK S., RIDDLE A., STEIN D.: *Mathematica in the Laboratory.* Cambridge University Press, 1997.

1. Diferenciální počet reálné funkce jedné reálné proměnné

1.1 Reálná funkce jedné reálné proměnné

Reálnou funkcí jedné reálné proměnné rozumíme předpis, podle něhož je každému prvku množiny $M \subset R$ přiřazen právě jeden prvek množiny $N \subset R$.

Definiční obor funkce $M = D(f)$

Obor hodnot funkce $N = H(f)$

Možnosti zadání funkce

- **TABULKOU**
- **GRAFEM**
- **FUNKČNÍM PŘEDPISEM**
  - explicitně
  - parametricky
  - implicitně

Vlastnosti funkce

- **Ohraničená funkce** (shora, zdola ohraničená)

  $\exists C \in R, \forall x \in D(f): |f(x)| \leq C$

- **Parita funkce**

  Funkce $f(x)$ se nazývá **sudá** $\Leftrightarrow \forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$

  Funkce $f(x)$ se nazývá **lichá** $\Leftrightarrow \forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$

- **Periodická funkce**

  $\exists p \in R, p \neq 0; \forall x \in R = D(f): f(x+p) = f(x)$

- **Složená funkce**

  Jsou dány funkce $f(z)$ a $u(x)$. Jestliže $\forall x \in \langle a, b \rangle$ lze přiřadit

  hodnotu funkce $u(x) = z \in \langle \alpha, \beta \rangle$, ve kterém je funkce $y = f(z)$

  definovaná, pak funkce $y = f[u(x)]$ se nazývá **složenou funkcí**.

  vnější funkce ... $y = f(z)$

  vnitřní funkce ... z $= u(x)$

Vlastnosti funkce

- **Prostá funkce**

  Funkce $f(x)$ se nazývá **prostá** na intervalu

  $\langle a,b \rangle \in D(f) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

- **Inverzní funkce**

  Inverzní funkcí k funkci $f(x)$ nazveme funkci $y = f^{-1}(x)$,

  jestliže ji lze zapsat ve tvaru $x = f(y)$.

- **Funkce rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající**

  Funkce $f(x)$ se nazývá **rostoucí** na intervalu

  $\langle a,b \rangle \in D(f) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

  Funkce $f(x)$ se nazývá **klesající** na intervalu

  $\langle a,b \rangle \in D(f) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Vlastnosti funkce

- **Funkce rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající**

  Funkce $f(x)$ se nazývá **nerostoucí** na intervalu

  $$\langle a,b\rangle \in D(f) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

  Funkce $f(x)$ se nazývá **neklesající** na intervalu

  $$\langle a,b\rangle \in D(f) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

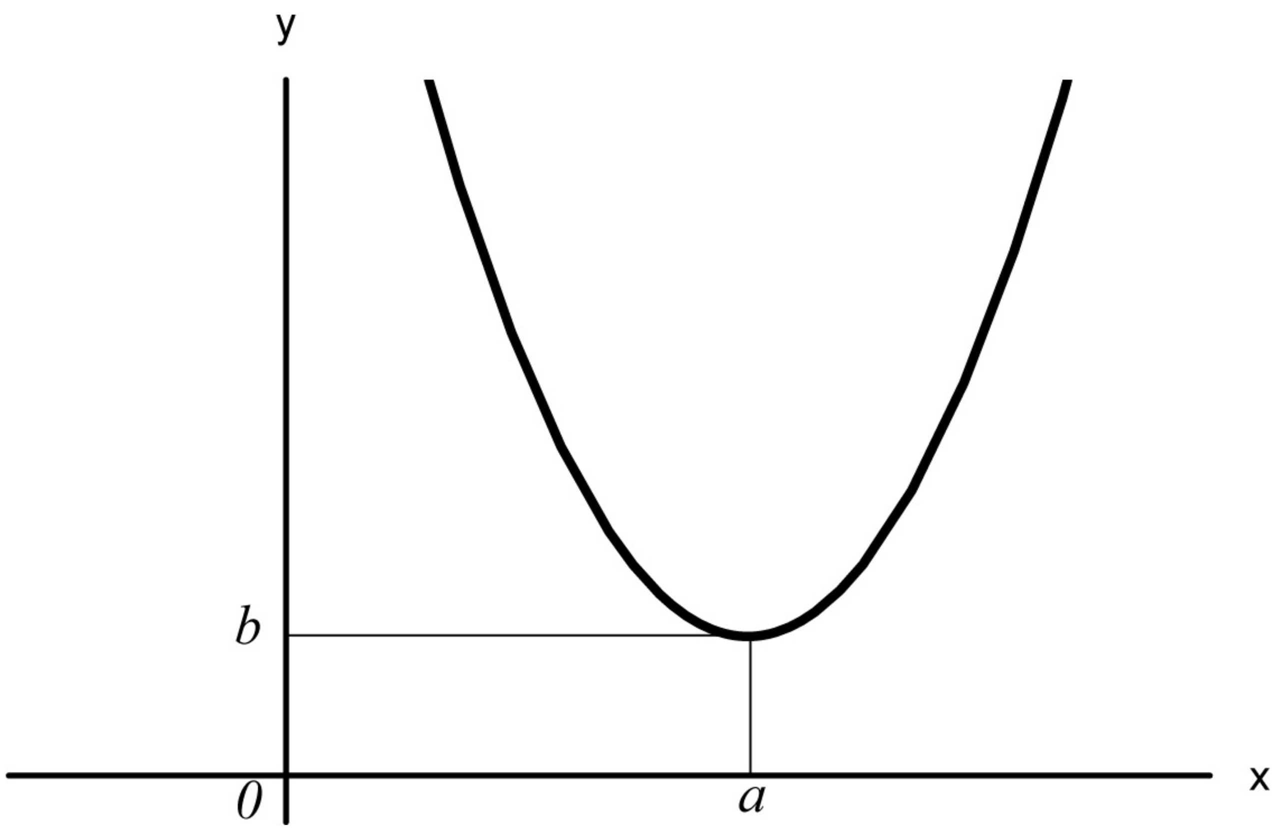
Přehled elementárních funkcí

- **TYPY FUNKCÍ**
  - **ALGEBRAICKÉ**
    - **RACIONÁLNÍ**
      - **CELÉ**
      - **LOMENÉ**
    - **IRACIONÁLNÍ**
  - **TRANSCENDENTNÍ**
    - **GONIOMETRICKÉ**
    - **CYKLOMETRICKÉ**
    - **EXPONENCIONÁLNÍ**
    - **LOGARITMICKÉ**
    - **HYPERBOLICKÉ**

Celé racionální funkce

- **Lineární funkce**
- **Kvadratická funkce**

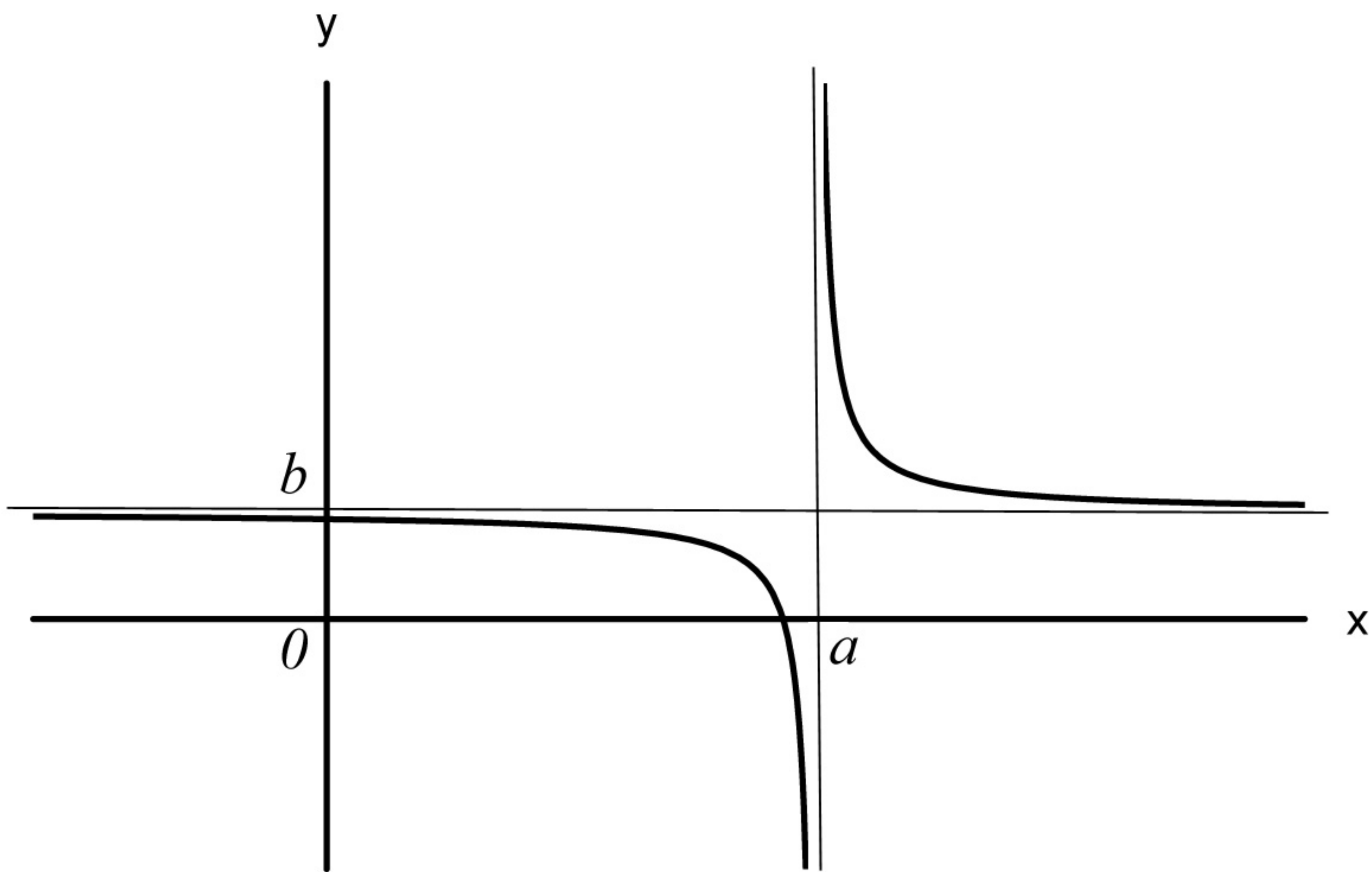
$$y = (x - a)^2 + b$$



- **Kubická funkce** *atd.*

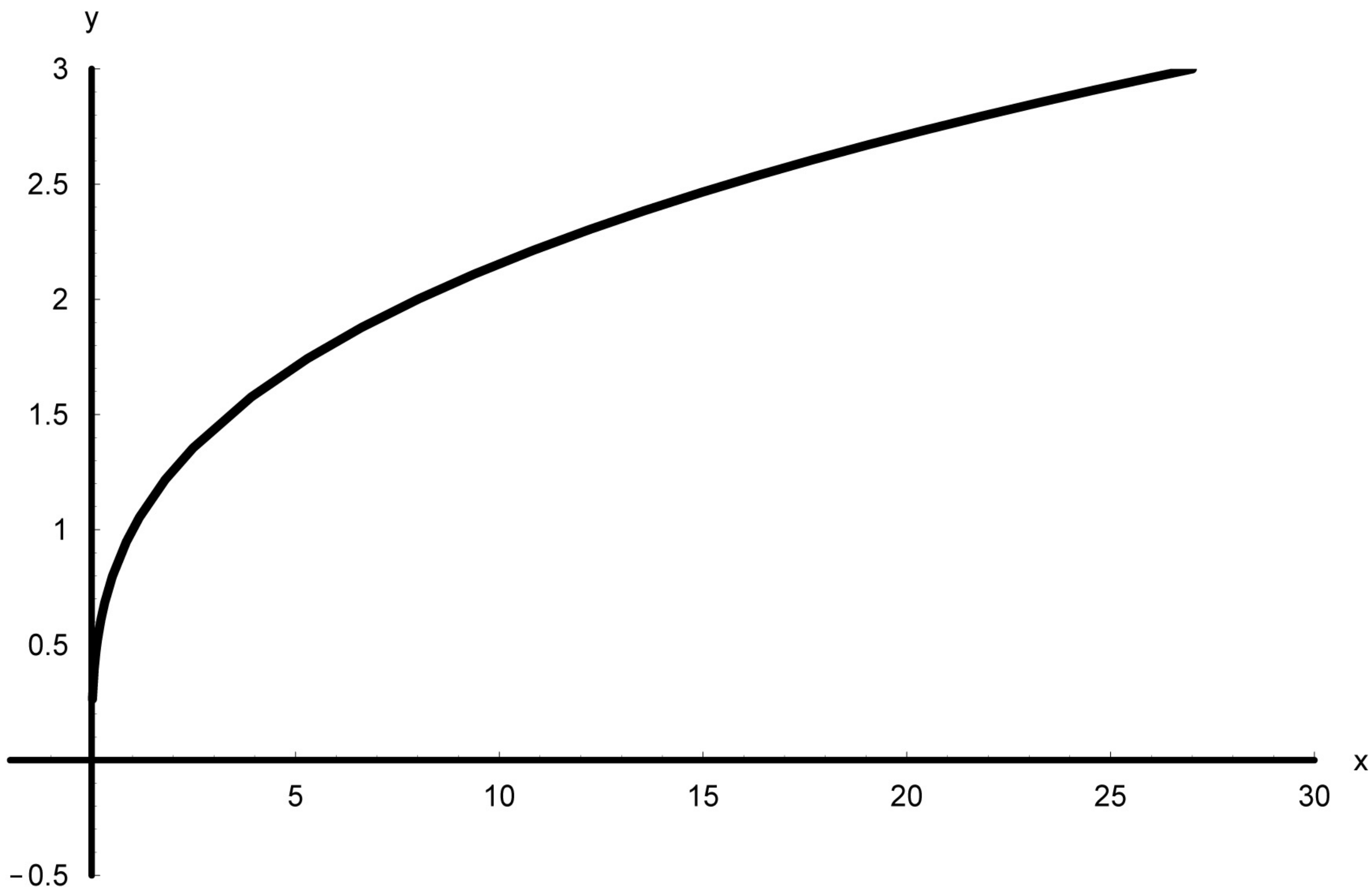
Lomené racionální funkce

$$y = \frac{k}{x-a} + b$$



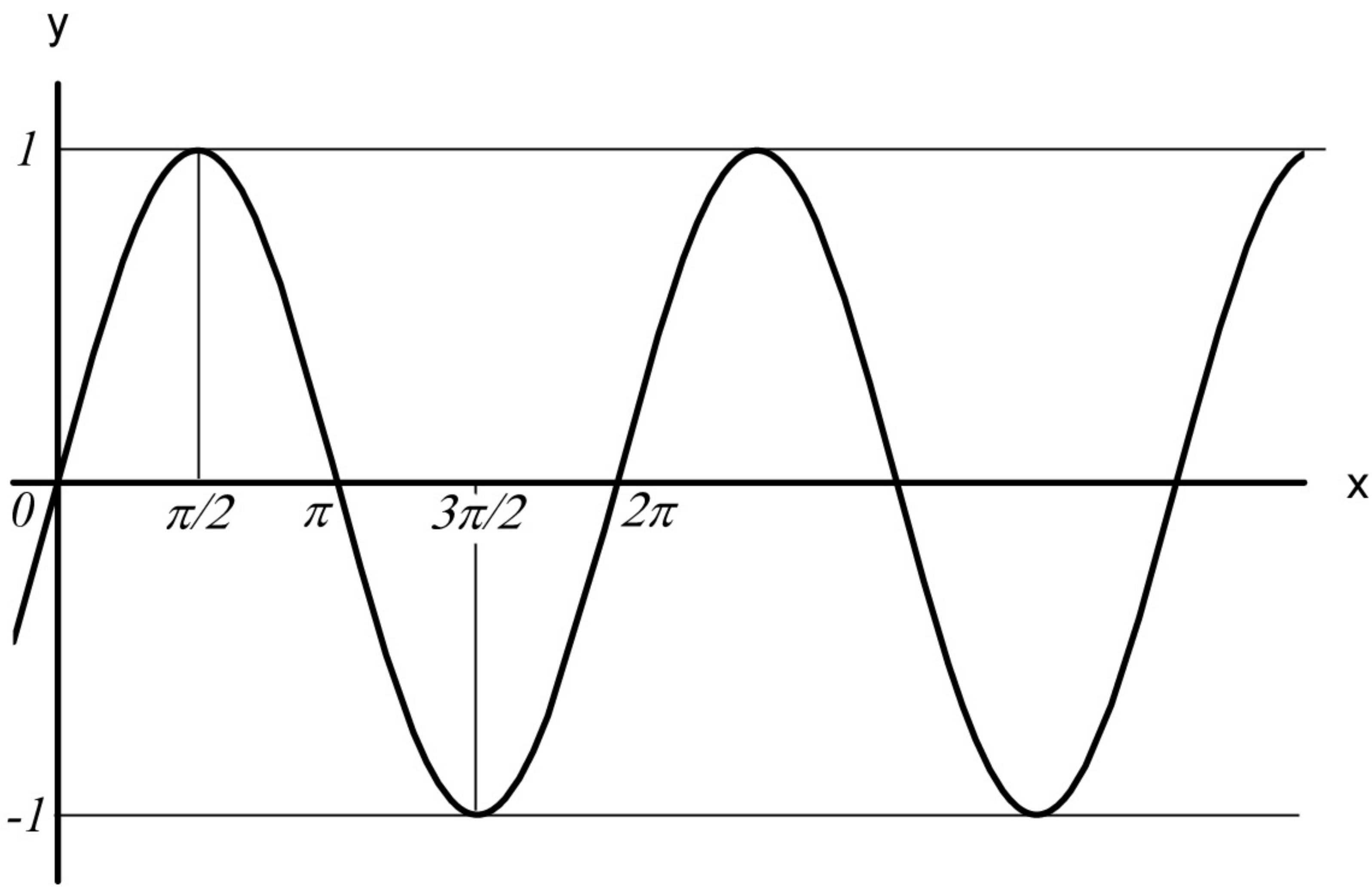
Iracionální funkce

$$y = \sqrt[3]{x}$$



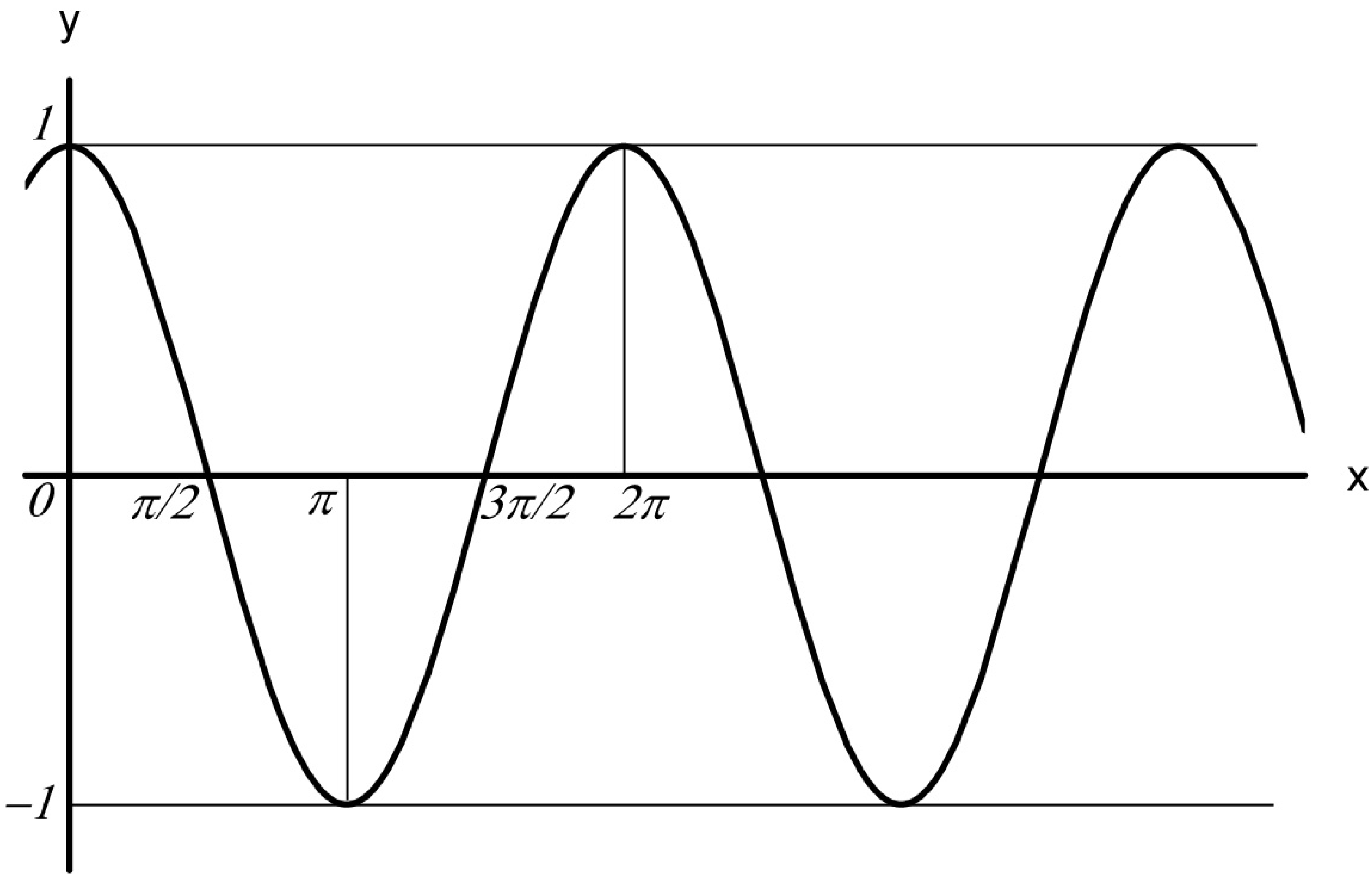
Goniometrické funkce

$$y = \sin x$$



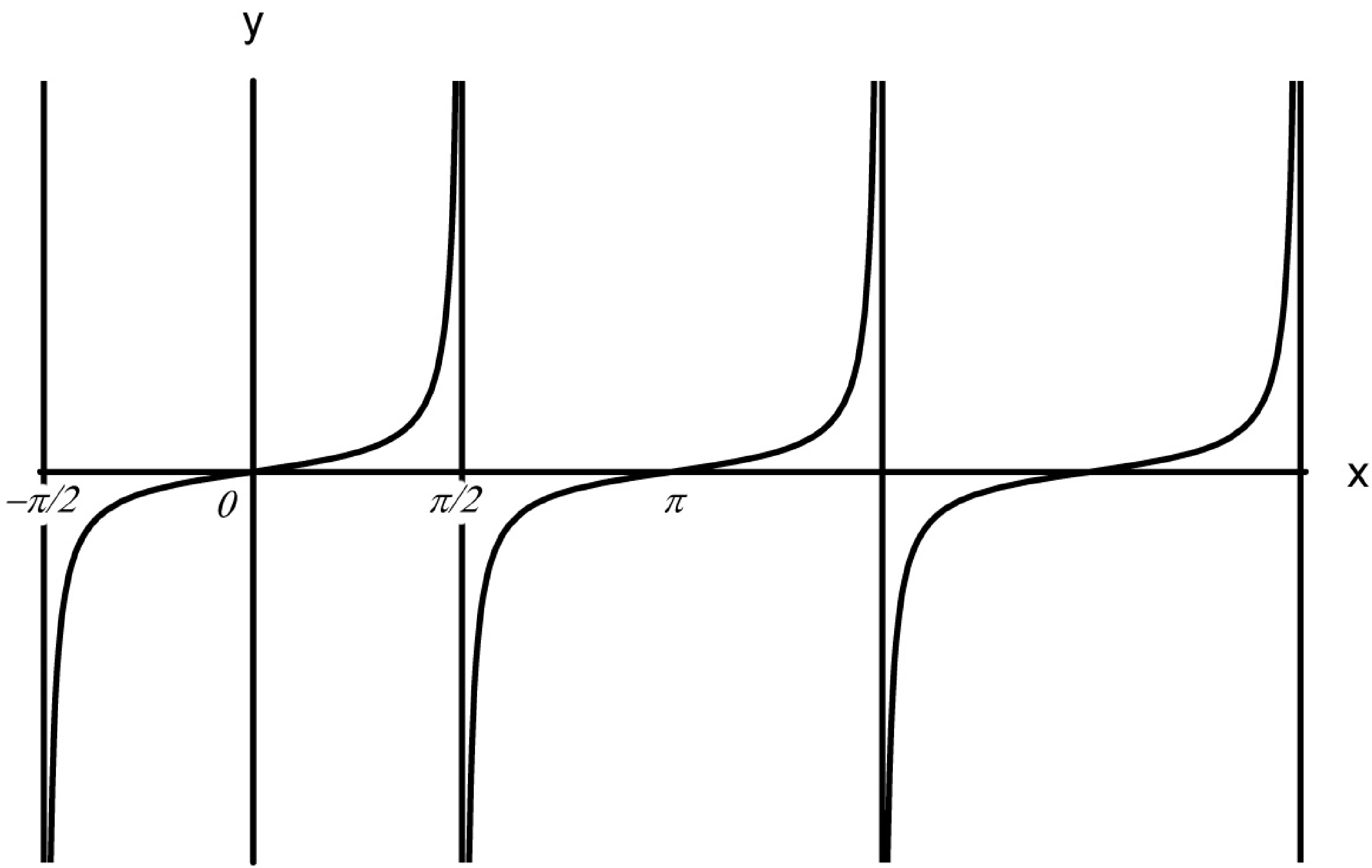
Goniometrické funkce

$$y = \cos x$$



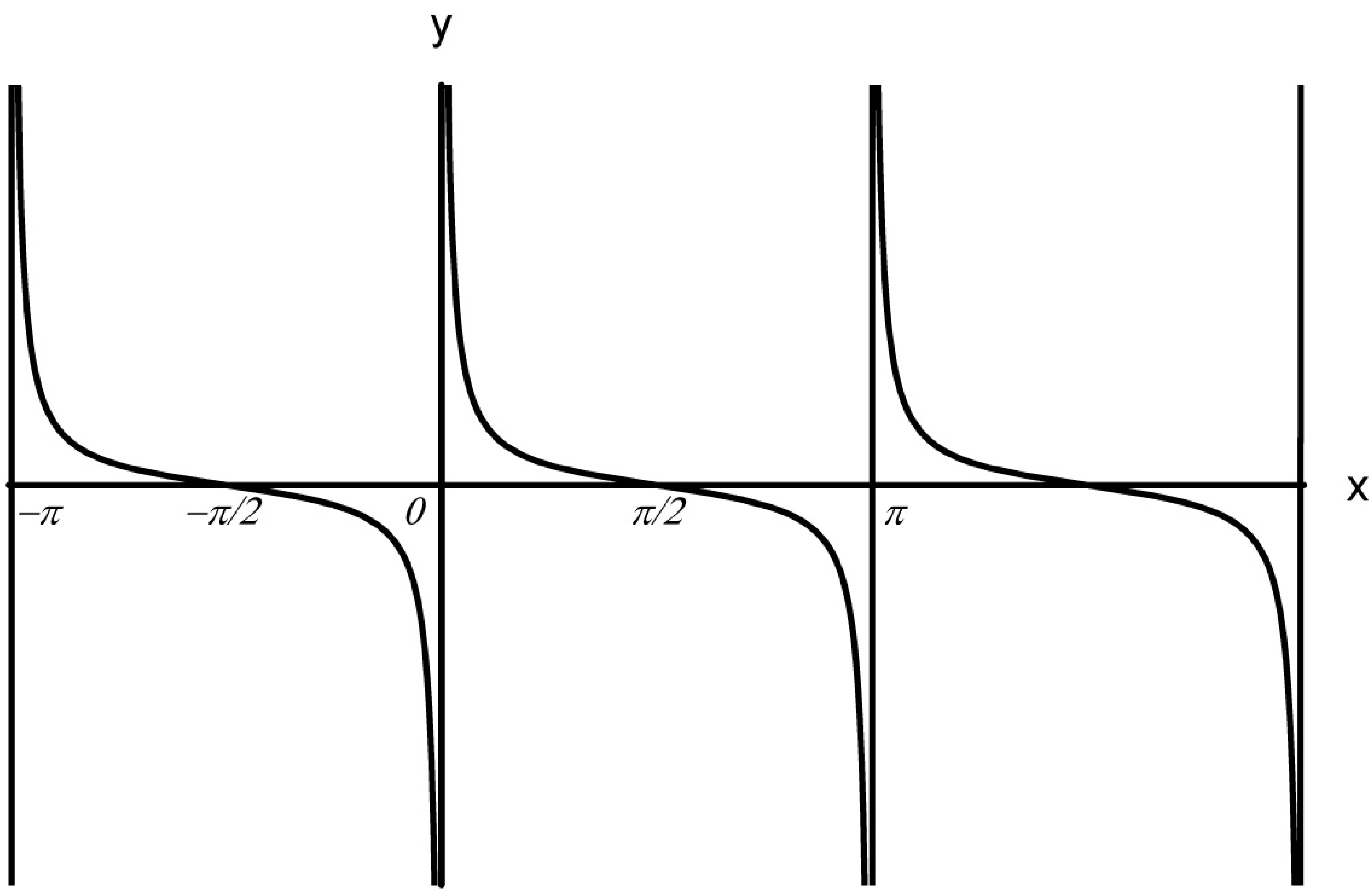
Goniometrické funkce

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg} x$$



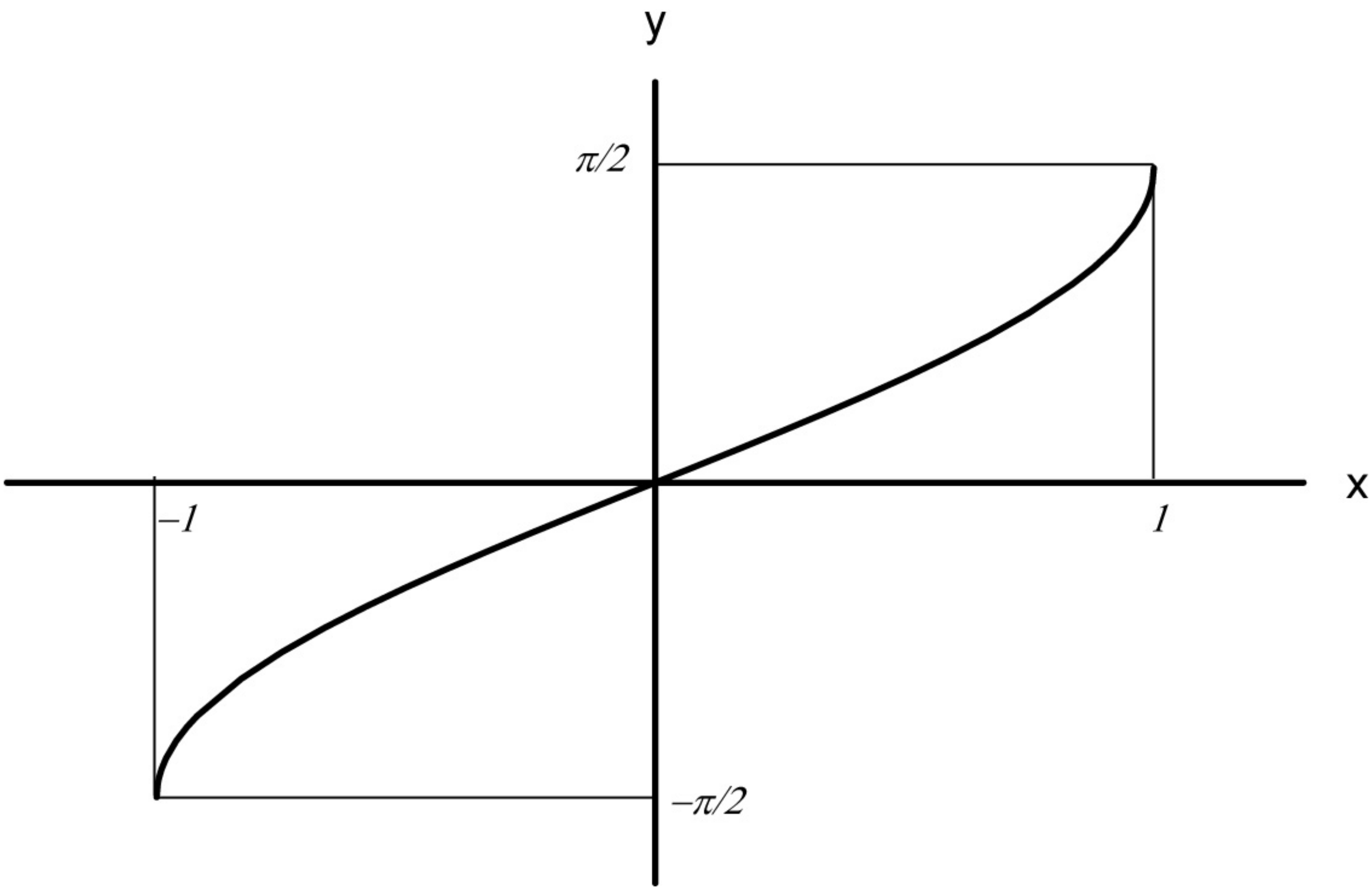
Goniometrické funkce

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{cotg}x$$



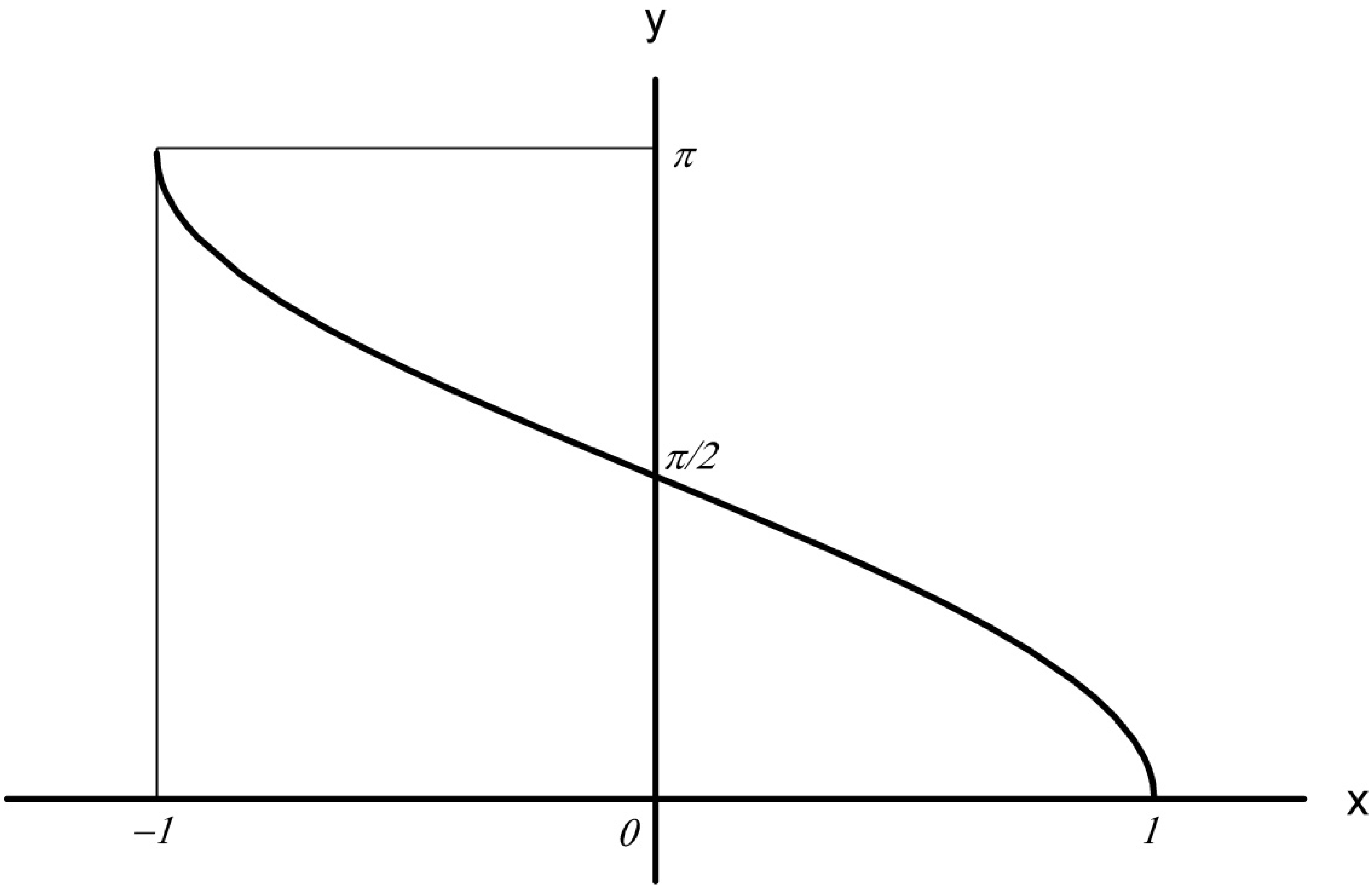
Cyklometrické funkce

$$y = \arcsin x,\ D(f) = \langle -1,1 \rangle,\ H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



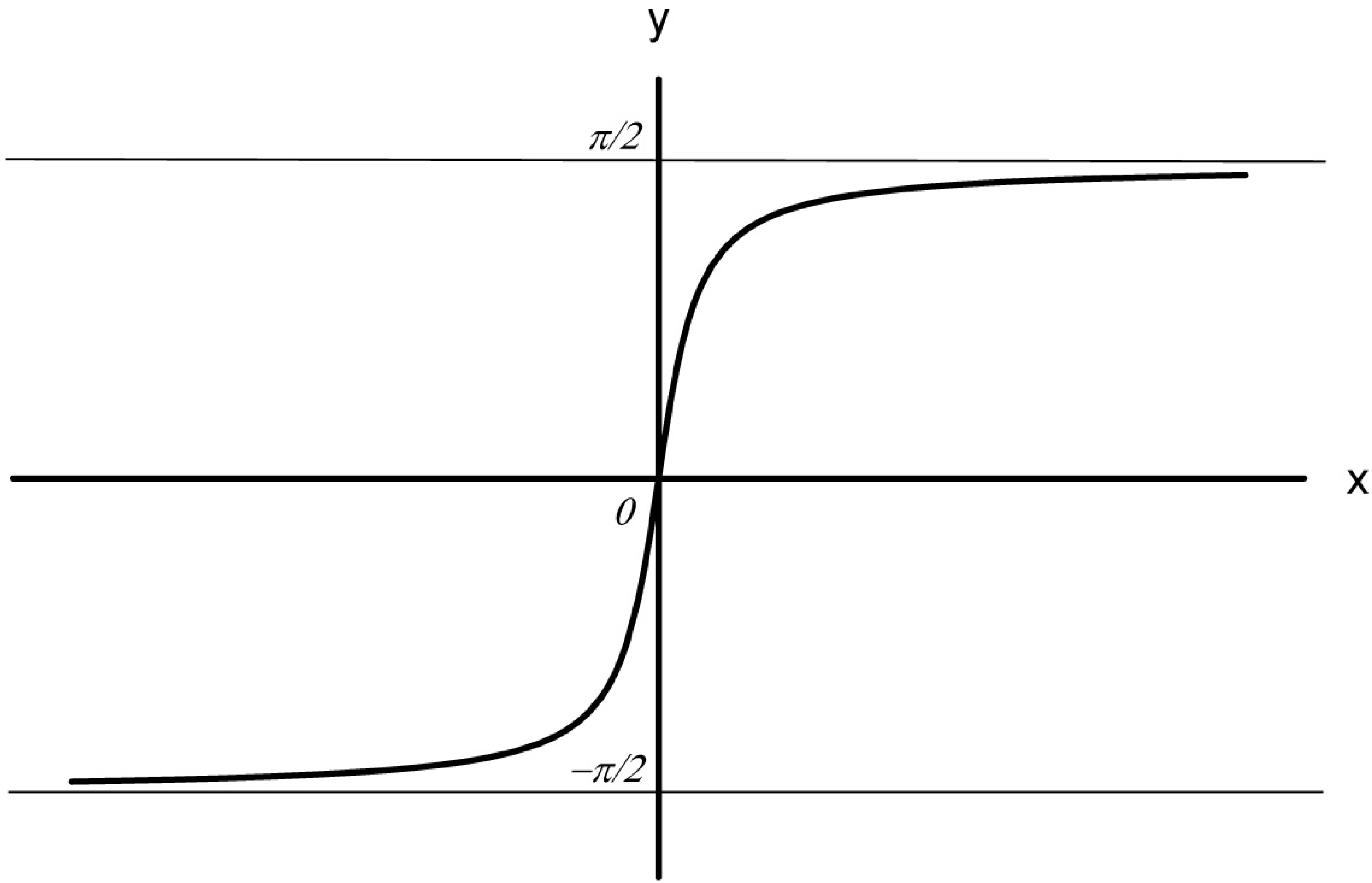
Cyklometrické funkce

$$y = \arccos x,\ D(f) = \langle -1,1 \rangle,\ H(f) = \langle 0,\pi \rangle$$



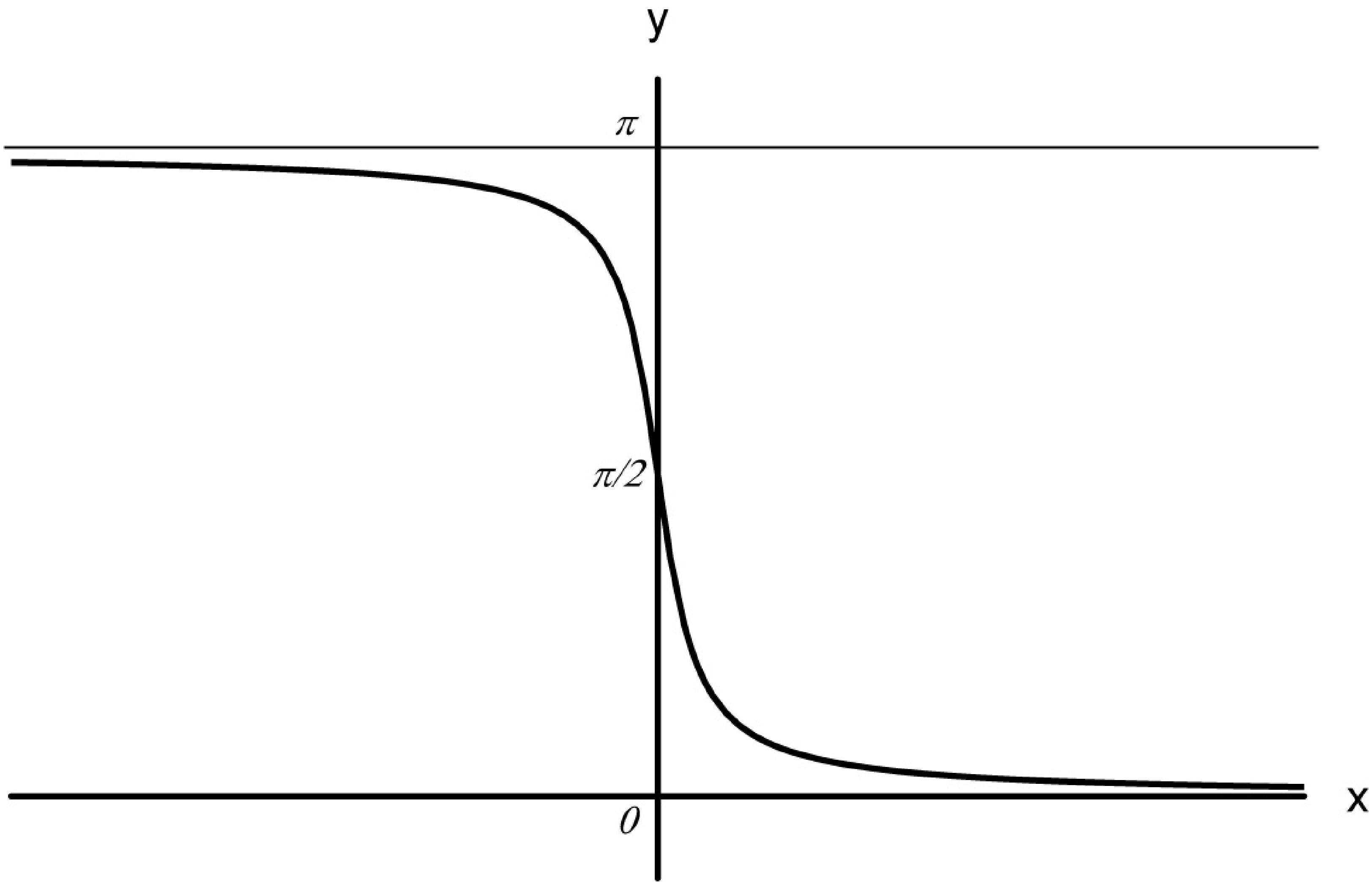
Cyklometrické funkce

$$y = \operatorname{arctg} x,\ D(f) = R,\ H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$



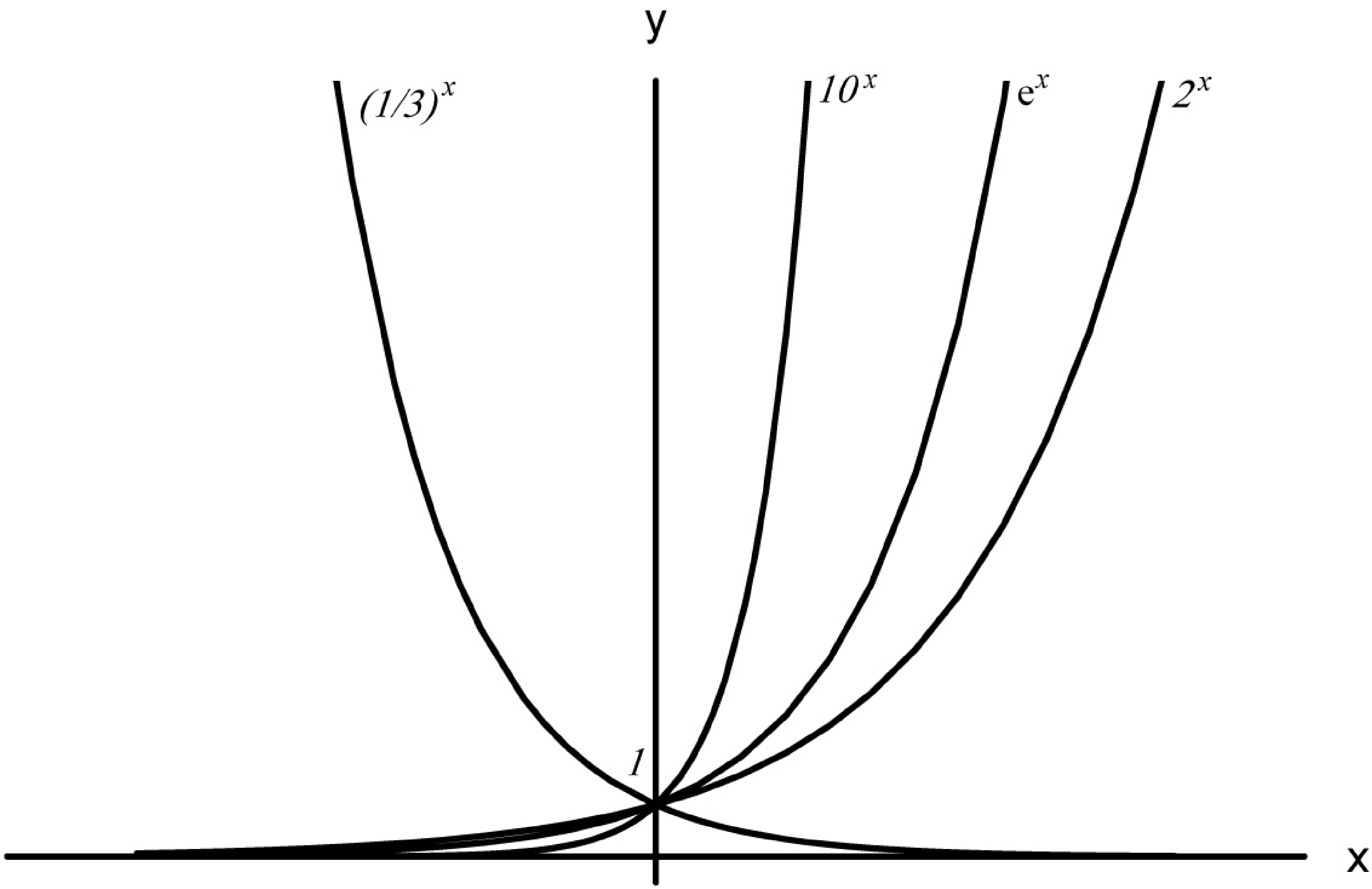
Cyklometrické funkce

$$y = \operatorname{arccotg} x, D(f) = R, H(f) = (0, \pi)$$



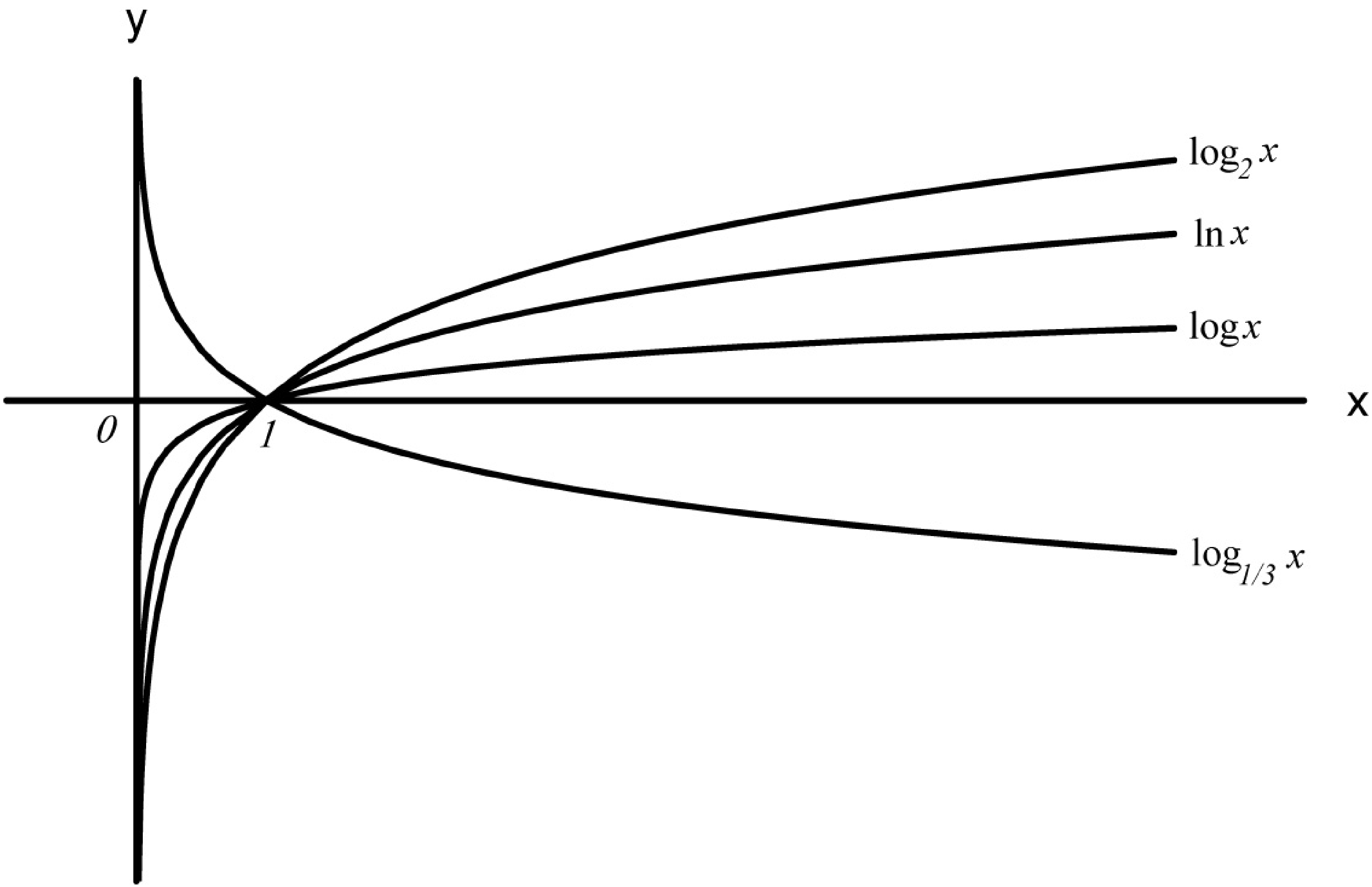
Exponenciální funkce

$$y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$$



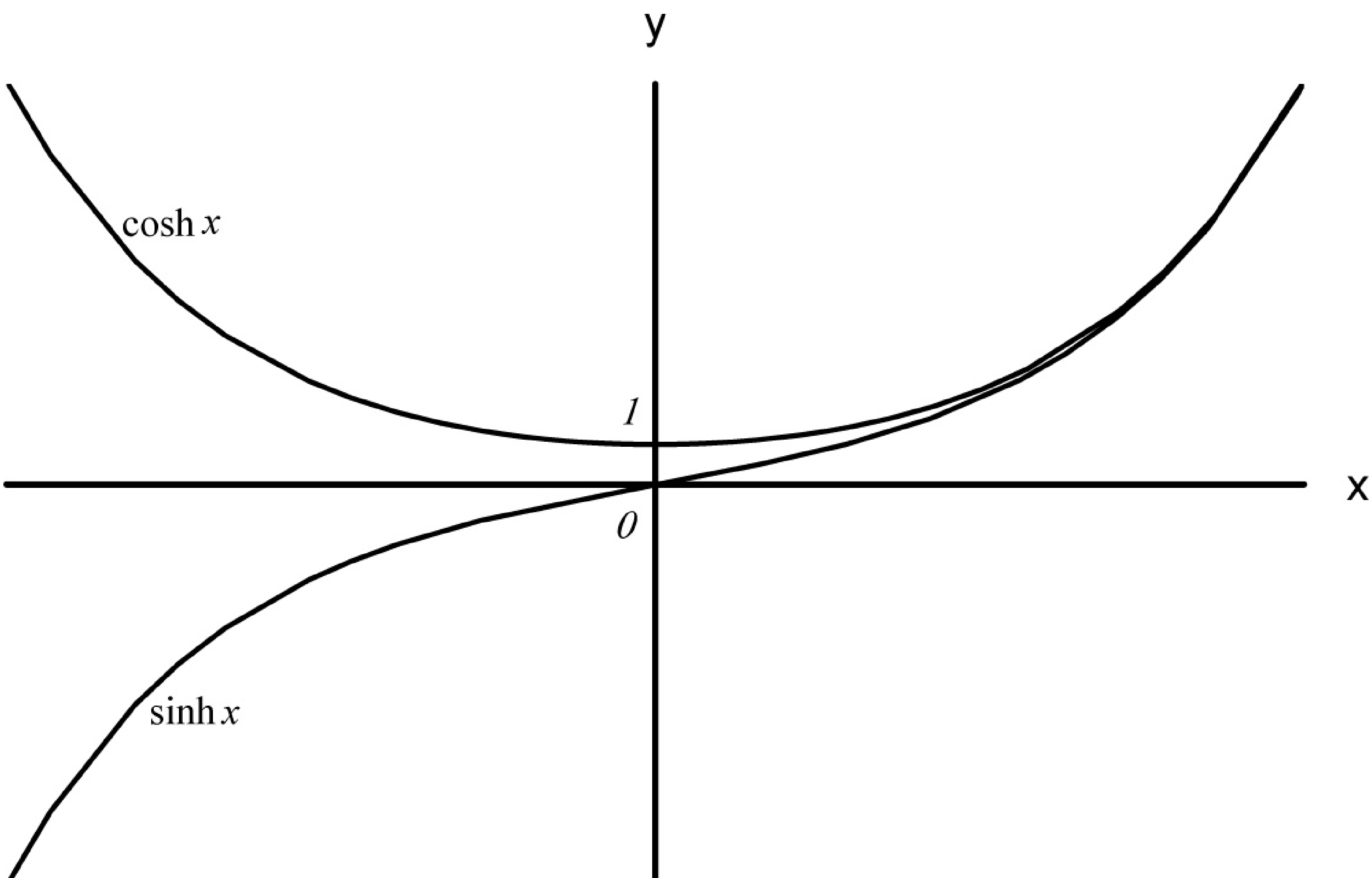
Logaritmická funkce

$$y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$$



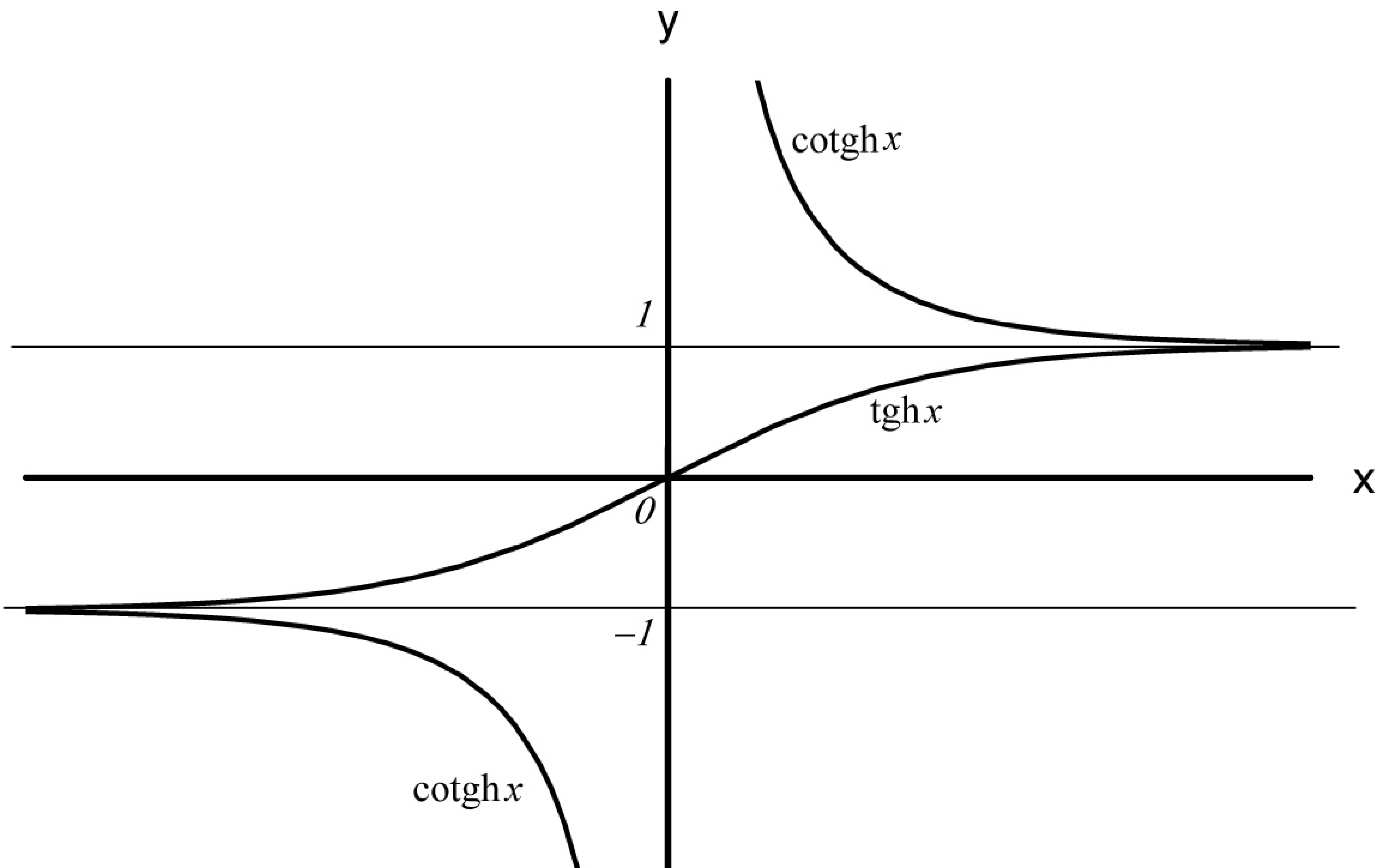
Hyperbolické funkce

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Hyperbolické funkce

$$y = \mathrm{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}, \quad y = \mathrm{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$



Úlohy

1. Rozhodněte, zda jsou funkcemi relace:

a) $f_1 = \{(x, y) \in R \times R; |y-1| + x = 0\}$,

b) $f_2 = \{(x, y) \in R \times R; |x| + |y| = 1, y \geq 0\}$,

c) $f_3 = \{(x, y) \in R \times R; x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0\}$.

2. Určete definiční obory funkcí

a) $f_1 : y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$,

b) $f_2 : y = \sqrt{x^3 - 4x^2} + \dfrac{3}{x-6}$,

c) $f_3 : y = \sqrt{\cos 2x}$,

d) $f_4 : y = \ln(\ln(\ln x))$.

3. Sestrojte grafy funkcí

a) $g_1 : y = |2x - 3| + 2x$,

b) $g_2 : y = ||x| - 3|$,

c) $g_3 : y = (\operatorname{sgn} x)^2$,

d) $g_4 : y = \max\{x, x^2\}$.

e) $f_1(t) = 3\sin\left(t - \dfrac{4}{3}\pi\right)$,

Úlohy

3. Sestrojte grafy funkcí

f) $f_2(t) = -2\sin 2\left(t + \frac{2}{3}\pi\right)$,

g) $f_3(t) = \frac{1}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) - 1$,

h) $f_4(t) = A\sin(\omega t + \varphi),\ A, \omega, \varphi \in R^+$,

i) $f_5(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\ A, \omega, \varphi \in R^+$,

j) $f_6(t) = -\mathrm{e}^{t}$,

k) $f_7(t) = \mathrm{e}^{-2t}$,

l) $f_8(t) = 2\mathrm{e}^{t-5} + 3$,

m) $f_9(t) = A\mathrm{e}^{\omega t + \varphi},\ A, \omega, \varphi \in R^+$,

n) $f_{10}(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi),\ A, \omega, \varphi, \gamma \in R^+$.

4. Rozhodněte, zda jsou si rovny funkce f, g, h.

$$f : y = \frac{1}{x^2 + x},\quad g : y = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^2}},\quad h : y = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}.$$

5. Rozhodněte, zda jsou sudé nebo liché funkce:

a) $f_1 : y = 4x^4 - x^2 + 5$,

b) $f_2 : y = \mathrm{tg}x + 2\sin x$,

c) $f_3 : y = |x - 1|$,

d) $f_4 : y = |x| - 1$.

Úlohy

6. Zjistěte, zda jsou dané funkce periodické, a v kladném případě určete periodu:

a) $f: y = \sin\frac{\pi x}{3} + \cos\frac{\pi x}{4}$,

b) $g: y = |\sin x|$,

c) $h: y = \sin x^2$,

d) $\varphi: y = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3\mathrm{tg}\frac{x}{3}$.

7. Dokažte, že funkce $f: y = \frac{2x}{x+1}$ je na intervalu $(-1, \infty)$ rostoucí.

8. Rozhodněte, zda jsou omezené, shora omezené nebo zdola omezené funkce dané vzorci:

a) $y = -2x^2 + 7x + 4, \quad x \in (-\infty, \infty)$,

b) $y = x^2 - 3x + 4, \quad x \in \langle -2, 2 \rangle$,

c) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x \in (-\infty, \infty)$.

9. Dokažte, že k daným funkcím existují funkce inverzní a najděte je:

a) $f: y = x^2 - 1, \quad x \in \langle 2, 5 \rangle$,

b) $g: y = \frac{2x}{x+3}, \quad x \in R - \{-3\}$,

c) $\varphi: y = -x^2 + 10x - 27, \quad x \in (-\infty, 5\rangle$,

d) $\psi: y = -x^2 + 10x - 27, \quad x \in \langle 5, \infty)$.