

1.2 Limita funkce

$$1.2.15 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}, \quad n \text{ je přirozené.}$$

Řešení:

Budeme upravovat čitatele:

$$\begin{aligned} x^{n+1} - (n+1)x + n &= (x^{n+1} - x) + (-nx + n) = x(x^n - 1) - n(x-1) = \\ &= (x-1)[x(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n] = (x-1)[x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - n] = \\ &= (x-1)[(x^n - 1) + (x^{n-1} - 1) + \dots + (x^2 - 1) + (x - 1)] = \\ &= (x-1)^2 [(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + (x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + \dots + (x + 1) + 1] \end{aligned}$$

Dále upravovat není nutné (nemluvě o tom, že jsme tuto úpravu již prováděli v příkladě 11). Dostáváme ihned (po vydělení $(x-1)^2$ a dosazení $x = 1$).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1.2.16 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right), \quad m \text{ a } n \text{ jsou přirozená}$$

Řešení:

Zde nesmíme podlehnout pokušení počítat tuto limitu jako rozdíl dvou limit. Lze totiž vcelku snadno ukázat, že $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{m}{1-x^m}$ vůbec neexistuje. (limita zleva je $+\infty$, limita zprava je $-\infty$).

Nezbývá nám tedy nic jiného, než limitovanou funkci upravit. Jak jsme právě zjistili, nemá cenu ji udržovat ve tvaru rozdílu, takže klidně můžeme oba zlomky převést na společného jmenovatele. Navíc výrazy $1-x^m$ a $1-x^n$ umíme rozložit a asi bude dobré je rozložit, protože limitu počítáme v bodě 1.

$$\begin{aligned} \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} &= \frac{m}{(1-x)(1+x+\dots+x^{m-2}+x^{m-1})} - \frac{n}{(1-x)(1+x+\dots+x^{n-2}+x^{n-1})} = \\ &= \frac{m(1+x+\dots+x^{n-2}+x^{n-1}) - n(1+x+\dots+x^{m-2}+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\dots+x^{m-2}+x^{m-1})(1+x+\dots+x^{n-2}+x^{n-1})} \end{aligned}$$

Tedy ale možná nevíme, jak dál. S výrazy, které se nám vyskytují v čitateli jsme ale už počítali. Podívejte se třeba na příklad 11! Budeme nyní upravovat pouze čitatele.

$$\begin{aligned} m(1+x+\dots+x^{n-2}+x^{n-1}) - n(1+x+\dots+x^{m-2}+x^{m-1}) &= m(1+x+\dots+x^{n-2}+x^{n-1}) - mn - \\ - n(1+x+\dots+x^{m-2}+x^{m-1}) + mn &= m[1+x+\dots+x^{n-2}+x^{n-1} - n] - n[1+x+\dots+x^{m-2}+x^{m-1} - m] = \\ m(x-1)(x^{n-2}+2x^{n-3}+3x^{n-4}+\dots+(n-2)x+n-1) &- n(x-1)(x^{m-2}+2x^{m-3}+3x^{m-4}+\dots+(m-2)x+m-1) \end{aligned}$$

Na základě všech předchozích výpočtů nyní dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = - \frac{m(1+2+\dots+(n-1)) - n(1+2+\dots+(m-1))}{mn} = - \frac{1+2+\dots+(n-1)}{n} +$$

$$+ \frac{1+2+\dots+(m-1)}{m} = - \frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2} = \frac{m-n}{2}$$

Byl by možný ale i trochu jiný postup. Vyjdeme-li z našich úprav čitatele zlomku, můžeme psát

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{m(1+x+\dots+x^{n-1}) - n(1+x+\dots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\dots+x^{m-1})(1+x+\dots+x^{n-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m[1+x+\dots+x^{n-1}-n] - n[1+x+\dots+x^{m-1}-m]}{(1-x)(1+x+\dots+x^{m-1})(1+x+\dots+x^{n-1})} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m[(x-1)+\dots+(x^{n-1}-1)] - n[(x-1)+\dots+(x^{m-1}-1)]}{(x-1)(1+x+\dots+x^{m-1})(1+x+\dots+x^{n-1})} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m \left[\frac{x-1}{x-1} + \dots + \frac{x^{n-1}-1}{x-1} \right] - n \left[\frac{x-1}{x-1} + \dots + \frac{x^{m-1}-1}{x-1} \right]}{(1+x+\dots+x^{m-1})(1+x+\dots+x^{n-1})} =$$

$$= - \frac{m \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n-1}-1}{x-1} \right] - n \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1}-1}{x-1} \right]}{\lim_{x \rightarrow 1} (1+x+\dots+x^{m-1}) \lim_{x \rightarrow 1} (1+x+\dots+x^{n-1})}$$

Vypočteme-li si nyní, že $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^k - 1}{x - 1} = k$, dostáváme pak snadno výsledek

$$- \frac{m[1+\dots+(n-1)] - n[1+\dots+(m-1)]}{mn} = - \frac{m \frac{(n-1)n}{2} - n \frac{(m-1)m}{2}}{mn} = - \frac{(n-1) - (m-1)}{2} = \frac{m-n}{2}.$$

$$1.2.17 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0), \alpha_k \neq 0$$

Řešení:

Máme vlastně vypočítat limitu polynomu. Budeme postupovat zcela stejně jako u limity posloupnosti.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^k \left(\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^k} \right) \right]$$

$$\text{Zřejmě } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \quad \text{Dále } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^k} \right) = \alpha_k$$

(použijeme skutečnost, že $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$)

$$1.2.18 \lim_{x \rightarrow +} (\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \alpha_k \neq 0$$

Řešení:

Zde postupujeme úplně stejně. Jediný rozdíl spočívá v tom, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases} \text{ je-li } k \text{ liché, sudé}$$

Takto dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^k \left(\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x} \right) \right] = \begin{matrix} +\infty & \text{liché} & \alpha_k < 0 \\ -\infty & \text{liché} & \alpha_k > 0 \\ -\infty & \text{sudé} & \alpha_k < 0 \\ +\infty & \text{sudé} & \alpha_k > 0 \end{matrix} \text{ pro } k$$

$$1.2.19 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_l x^l + \beta_{l-1} x^{l-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}, \quad \alpha_k \neq 0, \beta_l \neq 0$$

Řešení:

Zde se jedná o limitu racionální funkce. Postupujeme opět stejně jako u limity posloupnosti.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_l x^l + \beta_{l-1} x^{l-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k \left(\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^k} \right)}{x^l \left(\beta_l + \beta_{l-1} \frac{1}{x} + \dots + \beta_1 \frac{1}{x^{l-1}} + \beta_0 \frac{1}{x^l} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{k-l} \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^k}}{\beta_l + \beta_{l-1} \frac{1}{x} + \dots + \beta_1 \frac{1}{x^{l-1}} + \beta_0 \frac{1}{x^l}} \end{aligned}$$

Musíme rozlišit 3 případy:

a) případ $k = l$
zde dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^k}}{\beta_l + \beta_{l-1} \frac{1}{x} + \dots + \beta_1 \frac{1}{x^{l-1}} + \beta_0 \frac{1}{x^l}} = \frac{\alpha_k}{\beta_l}$$

b) případ $k < l$

zde dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{k-l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^k}}{\beta_l + \beta_{l-1} \frac{1}{x} + \dots + \beta_1 \frac{1}{x^{l-1}} + \beta_0 \frac{1}{x^l}} = 0 \cdot \frac{\alpha_k}{\beta_l} = 0.$$

c) případ $k > l$

zde dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{k-l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^k}}{\beta_l + \beta_{l-1} \frac{1}{x} + \dots + \beta_1 \frac{1}{x^{l-1}} + \beta_0 \frac{1}{x^l}} = +\infty \cdot \frac{\alpha_k}{\beta_l} = \begin{cases} -\infty & \text{je-li } \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0 \\ +\infty & \text{je-li } \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0 \end{cases}.$$

V případě, že $\alpha_k < 0 / > 0$ existuje číslo $d < 0 / > 0$ takové, že $\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 < d / > d$ na nějakém okolí bodu $+\infty$

Potom

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \begin{cases} -\infty & \text{je-li } \alpha_k < 0 \\ +\infty & \alpha_k > 0 \end{cases}$$

$$1.2.20 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_l x^l + \beta_{l-1} x^{l-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$$

Řešení:

Zde budou pouze malé rozdíly oproti předchozímu příkladu.

- a) případ $k = l$
zde nedochází k žádné změně.
- b) případ $k < l$
zde rovněž nedochází k žádné změně
- c) případ $k > l$
připomeňme ještě, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{k-l} = \begin{cases} -\infty & \text{je-li } k-l \text{ liché} \\ +\infty & \text{je-li } k-l \text{ sudé.} \end{cases}$$

Dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{k-l} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^k}}{\beta_l + \beta_{l-1} \frac{1}{x} + \dots + \beta_1 \frac{1}{x^{l-1}} + \beta_0 \frac{1}{x^l}} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } k-l \text{ liché, } \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0 \\ -\infty & \text{pro } k-l \text{ liché, } \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0 \\ -\infty & \text{pro } k-l \text{ sudé } \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0 \\ +\infty & \text{pro } k-l \text{ sudé } \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0 \end{cases}$$

Takto vidíme, že limity racionálních funkcí v bodech $-\infty$ a $+\infty$ podobně jako tomu bylo v analogickém případě limit posloupností – nemusíme vlastně počítat, ale můžeme rovnou psát výsledek. Uveďme několik jednoduchých příkladů.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{-3x^4 + 2x - x} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{-3x^4 + 2x - x} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 5}{x^7 + 7} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 5}{x^7 + 7} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^6 + x^3 + 1}{2x^5 - 2} = +\infty \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^6 + x^3 + 1}{2x^5 - 2} = -\infty \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = +\infty$$

V případě limit racionálních funkcí v bodech $-\infty$ a $+\infty$ nemusíme ovšem vždy postupovat jen podle předchozího návodu. To nám ukážou následující dva příklady.

$$1.2.21 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$$

Řešení:

V čitateli máme součin pěti výrazů a ve jmenovateli pátou mocninu. Tuto limitu můžeme tedy napsat ve tvaru

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-1)}{(5x-1)} \cdot \frac{(x-2)}{(5x-1)} \cdot \frac{(x-3)}{(5x-1)} \cdot \frac{(x-4)}{(5x-1)} \cdot \frac{(x-5)}{(5x-1)} \right]$$

což je dle předchozích výsledků rovno

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{5x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{5x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{5x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-4}{5x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5}{5x-1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5^5}.$$

$$1.2.22 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

Řešení:

Zde opět dle předchozích výsledků

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{20} \cdot \left(\frac{3x+2}{2x+1} \right)^{30} \right] = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{20} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{2x+1} \right)^{30} = \\ &= \left(\frac{2}{2} \right)^{20} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{30} = \left(\frac{3}{2} \right)^{30}. \end{aligned}$$

$$1.2.23 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1) \cdots (x^n+1)}{\left[(nx)^n + 1\right]^{\frac{n+1}{2}}}$$

Řešení:

Díváme-li se na čitatele, může nás napadnout, že by třeba nebylo špatné celý limitovaný výraz napsat ve tvaru součinu. Jenže jmenovatel se možná nezdá být k tomuto účelu přizpůsoben. Aby nám vycházelo něco rozumného alespoň v čitateli, bylo by dobré, kdyby činitel $x^k + 1$ byl vydělen mocninou x^k . Můžeme tedy zkusit čitatele i jmenovatele vydělit výrazem $x \cdot x^2 \cdot \dots \cdot x^n$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1) \cdots (x^n+1)}{\left[(nx)^n + 1\right]^{\frac{n+1}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{x} \cdot \frac{x^2+1}{x^2} \cdots \frac{x^n+1}{x^n}}{\frac{\left[(nx)^n + 1\right]^{\frac{n+1}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} \cdots \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n+1}{x^n}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(nx)^n + 1}{x^n} \right]^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{\left[n^n\right]^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

Za účelem výpočtu limity ve jmenovateli je nutno použít větu o limitě složené funkce. Vnitřní funkcí je zde funkce $g(x) = \frac{(nx)^n + 1}{x^n}$ a vnější funkcí je funkce $f(y) = y^{\frac{n+1}{2}}$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(nx)^n + 1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^n x^n + 1}{x^n} = n^n$$

$$\lim_{y \rightarrow n^n} y^{\frac{n+1}{2}} = \left[n^n\right]^{\frac{n+1}{2}}$$

Neboť funkce $y^{\frac{n+1}{2}}$ je spojitá v bodě n^n . Pro složenou funkci $f(g(x)) = \left[\frac{(nx)^n + 1}{x^n}\right]^{\frac{n+1}{2}}$ tedy potom platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(nx)^n + 1}{x^n} \right]^{\frac{n+1}{2}} = \lim_{y \rightarrow n^n} y^{\frac{n+1}{2}} = \left[n^n\right]^{\frac{n+1}{2}}.$$

$$1.2.24 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

Řešení:

U příkladů tohoto typu je postup podobný jako u racionálních funkcí. V čitateli i jmenovateli vytkneme nejvyšší mocninu proměnné x^n . Zde je to v obou případech \sqrt{x} . Dostáváme

$$\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

Odtud

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

K výpočtu limit v čitateli a jmenovateli je ovšem potřeba použít zase větu o limitě složené funkce, a to dokonce několikrát. Ukážeme, jak určíme limitu v čitateli. Za vnitřní funkci vezmeme funkci $g(x) = \frac{1}{x^3}$ a za vnější vezmeme $f(x) = \sqrt{y}$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{y} = 0$$

přičemž poslední limita je rovna 0, protože funkce je v bodě 0 spojitá zprava. (Pozor! Používáme zde jednostrannou verzi věty o limitě složené funkce.) Pro složenou funkci

$$f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x^3}} \quad \text{tedy platí}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{y} = 0$$

Dále protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x^3}} = 0$$

Opětne použijeme větu o limitě složené funkce. Vnitřní funkce tentokrát bude $g(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}$ a vnější $f(y) = \sqrt{y}$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}} \right) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{y} = 0$$

odkud pro limitu složené funkce $f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}$ dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} = 0$$

Použijeme-li ještě jednou větu o limitě složené funkce, dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} = 1.$$

$$1.2.25 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$$

Řešení:

V čitateli máme součet, takže můžeme zkusit napsat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x+1}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}.$$

V takových případech ovšem musíme být opatrní. Musíme se přesvědčit, že všechny tři limity vpravo existují a jsou vlastní. (Zde tomu tak je.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x}{2x+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}$ a protože můžeme použít větu o limitě složené funkce. Z podobných důvodů

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{x^2}{(2x+1)^3}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{x}{(2x+1)^2}} = 0$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$1.2.26 \quad \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

Řešení:

Postupujeme velmi podobně. V čitateli máme druhou mocninu – použijeme tedy $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, a rozšíříme výrazem $\sqrt{1-x} + 3$. Ve jmenovateli ovšem máme odmocninu třetí, takže použijeme $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$. Nijak nás nemusí mýlit, že ve jmenovateli je součet a nikoliv rozdíl. Vezmeme totiž $A = \sqrt[3]{x}$ a $B = -2$. Rozšíříme

tedy výrazem $A^2 + AB + B^2 = (\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 4$. Celkem tedy budeme rozšiřovat výrazem $(\sqrt{1-x} - 3)(\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 4$. Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{\sqrt[3]{x} + 2} &= \frac{(\sqrt{1-x} - 3)(\sqrt{1-x} + 3)((\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt[3]{x} + 2)(\sqrt{1-x} + 3)((\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \frac{(1-x-9)((\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(x+8)(\sqrt{1-x} + 3)} = \\ &= -\frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt{x-1} + 3} \end{aligned}$$

Odtud

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \left(-\frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt{1-x} + 3} \right) = -\frac{(\sqrt[3]{-8})^2 - 2\sqrt[3]{-8} + 4}{\sqrt{1+8} + 3} = -\frac{4+4+4}{3+3} = -2$$

neboť funkce $-\frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt{x-1} + 3}$ je v bodě -8 spojitá.

$$1.2.27 \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad a > 0$$

Řešení:

Zde je nutná nejprve předběžná úprava.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

což, jak víme, platí, jestliže obě limity vpravo existují a jsou vlastní. Máme však

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x^2 - a^2}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x-a}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = 0 \end{aligned}$$

neboť funkce $\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$ definovaná na intervalu $\langle a, +\infty \rangle$ je v bodě a spojitá zprava.

Všimněte si, že k výpočtu limity stačilo zlomek rozšířit pouze výrazem $\sqrt{x} + \sqrt{a}$, přičemž jmenovatele jsme v tomto okamžiku vcelku nebrali v úvahu (ve jmenovateli není totiž žádný součet ani rozdíl, ale pouze jediná odmocnina). Dále

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

neboť funkce $\frac{1}{\sqrt{x+a}}$ je spojitá v bodě a . Vychází tedy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = 0 + \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

$$1.2.28 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$$

Řešení:

Zde ve jmenovateli žádná odmocnina není, takže k rozšiřování zlomku přispěje pouze čítel.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}{(x^2 - 9)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 13 - 4(x+1)}{(x^2 - 9)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{(x^2 - 9)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \frac{-3}{(3+3)(\sqrt{3+13} + 2\sqrt{3+1})} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$