

4.1 Řešení základních typů diferenciálních rovnic 1.řádu

4.1.42 Určete řešení $z(x)$ Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$y' + \frac{2}{x}y = 0 \quad (1)$$

vyhovující počáteční podmínce $z(1) = 2$.

Řešení:

Po separaci proměnných v rovnici (1) dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}dx$$

a po integraci získáme řešení rovnice (1) ve tvaru $y(x) = C/x^2$, kde C je konstanta a $x \in (-\infty, 0)$, resp. $x \in (0, +\infty)$. Řešením dané úlohy je funkce z , daná rovnicí $z(x) = 2/x^2, x \in (0, +\infty)$.

4.1.43 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' + 2xy = 4x. \quad (1)$$

Řešení:

Nejdříve najdeme řešení homogenní rovnice

$$y' + 2xy = 0. \quad (2)$$

Po separaci proměnných v rovnici (2) a po integraci je

$$y(x) = Ce^{-x^2}, x \in \mathbf{R}, C \text{ je konstanta.}$$

Řešení nehomogenní rovnice (1) určíme ve tvaru

$$y(x) = u(x)e^{-x^2}, \quad (3)$$

Kde $u(x)$ je neznámá funkce, kterou najdeme, dosadíme-li z (3) do rovnice (1):

$$u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2} + 2xue^{-x^2} = 4x. \quad (4)$$

Z rovnice (4) vypočteme $u' = 4xe^{x^2}$ a po integraci dostaneme

$$u(x) = 4 \int xe^{x^2} dx + K,$$

kde K je konstanta. Je tedy $u(x) = 2e^{x^2} + K$ a všechna řešení rovnice (1) jsou určena rovnicí

$$\underline{y(x) = Ke^{-x^2} + 2, \quad x \in \mathbf{R}.}$$

4.1.44 Určete všechna řešení rovnice

$$ydx - (2x + y^3)dy = 0. \quad (1)$$

Řešení:

Rovnici (1) lze zapsat ve tvaru nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu vzhledem k proměnné x :

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2 \quad (2)$$

za předpokladu, že $y \neq 0$.

Dosazením $y = 0$ do rovnice (1) ověříme, že funkce $y(x) = 0, x \in \mathbf{R}$, je triviálním řešením této rovnice. Netriviální řešení rovnice (1) určíme řešením rovnice (2).

Nejdříve najdeme řešení homogenní rovnice

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = 0.$$

Po separaci proměnných a po integraci dostaneme $x(y) = Cy^2$, kde C je konstanta a $y \in (-\infty, 0)$, resp. $y \in (0, +\infty)$. Řešení rovnice (2) určíme ve tvaru $x(y) = u(y)y^2$, kde $u(y)$ je neznámá funkce, kterou najdeme, dosadíme-li do rovnice (2):

$$\frac{du}{dy}y^2 + 2uy - \frac{2}{y}uy^2 = y^2.$$

Pro $y \neq 0$ dostaneme podmínku $du/dy = 1$, a tedy $u(y) = y + K$, kde K je konstanta. Všechna řešení rovnice (1) jsou určena rovnicemi

$$\begin{aligned} x(y) &= Ky^3 + y, \quad y \in \mathbf{R}, \\ \underline{y(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}.} \end{aligned}$$

4.1.45 Určete integrální křivku diferenciální rovnice

$$(x + y^2)dy = ydx, \quad (1)$$

procházející bodem $M[1,1]$.

Řešení:

Rovnici (1) lze pro $y \neq 0$ zapsat ve tvaru

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y. \quad (2)$$

Funkce $y(x) = 0$ je řešením rovnice (1), ale nevyhovuje dané počáteční podmínce.

Rovnice (2) je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí prvního řádu vzhledem k proměnné x . Nejdříve najdeme řešení homogenní rovnice

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = 0. \quad (3)$$

Po separaci proměnných a po integraci dostaneme řešení rovnice (3) ve tvaru $x(y) = Cy$, kde C je konstanta a $y \in (-\infty, 0)$, resp. $y \in (0, +\infty)$.

Řešení rovnice (2) tedy hledáme ve tvaru $x(y) = u(y)y$. Dosadíme-li do rovnice (2), musí platit $u'y + u - u = y$, a tedy pro $y \neq 0$ je $u(y) = y + K$, kde K je konstanta. Řešení rovnice (2) jsou určena rovnicí $x(y) = Ky + y^2, y \neq 0$. Všechna řešení rovnice (1) jsou určena rovnicemi $x(y) = Ky + y^2, y \in \mathbf{R}$, a $y(x) = 0, x \in \mathbf{R}$. Z množiny integrálních křivek určených těmito rovnicemi najdeme integrální křivku procházející bodem $M[1,1]$. Musí být splněna rovnice $1 = K + 1$, a tedy $K = 0$. Hledanou integrální křivkou rovnice (1) je parabola s rovnicí $x = y^2$.

4.1.46 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t \cos x + \sin(2x)}. \quad (1)$$

Řešení:

Rovnice

$$\frac{dt}{dx} = t \cos x + \sin(2x) \quad (2)$$

Je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí prvního řádu vzhledem k proměnné t .

Nejdříve určíme řešení homogenní rovnice

$$\frac{dt}{dx} - t \cos x = 0. \quad (3)$$

Po separaci proměnných v rovnici (3) a po integraci dostaneme za předpokladu, že $t \neq 0$, řešení rovnice (3):

$$t(x) = Ce^{\sin x},$$

kde C je konstanta a $x \in \mathbf{R}$

Řešení nehomogenní rovnice (2) hledáme ve tvaru

$$t(x) = u(x)e^{\sin x},$$

přičemž musí platit

$$u'e^{\sin x} + u \cos x e^{\sin x} - u \cos x = \sin(2x).$$

Je tedy

$$u' = \sin(2x)e^{-\sin x},$$

$$u(x) = 2 \int \sin x \cos x e^{-\sin x} dx + K,$$

kde K je konstanta. Po integraci dostaneme

$$u(x) = -2(1 + \sin x)e^{-\sin x} + K.$$

Řešení rovnice (1) je určeno implicitně rovnicí

$$t = Ke^{\sin x} - 2(1 + \sin x).$$

4.1.47 Určete řešení $z(x)$ diferenciální rovnice

$$y' + (\sqrt{x})y = 3x^2, \quad (1)$$

Které vyhovuje počáteční podmínce $z(1) = -3/2$.

Řešení:

Funkce $p(x) = \sqrt{x}$, $q(x) = 3x^2$ jsou definované a spojité na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, a tedy v libovolném bodě oblasti $D = (0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ je zajištěna existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici (1). Protože bod $[1, -3/2]$ leží v oblasti D , existuje právě jedno řešení dané úlohy.

Určíme nejdříve řešení rovnice (1). Řešíme-li homogenní rovnici $y' + (\sqrt{x})y = 0$, pak po separaci proměnných a po integraci dostaneme řešení ve tvaru $y(x) = Ce^{-2(\sqrt{x^3})/3}$, kde C je konstanta.

Řešení rovnice (1) hledáme ve tvaru $y(x) = u(x)e^{-2(\sqrt{x^3})/3}$, přičemž pro funkci $u(x)$ musí platit

$$u'e^{-2(\sqrt{x^3})/3} - u(\sqrt{x})e^{-2(\sqrt{x^3})/3} + u(\sqrt{x})e^{-2(\sqrt{x^3})/3} = 3x^2$$

neboli $u' = 3x^2 e^{2(\sqrt{x^3})/3}$. Po integraci získáme funkci u ve tvaru

$$u(x) = \left(\left(3\sqrt{x^3} \right) - \frac{9}{2} \right) e^{2(\sqrt{x^3})/3} + K,$$

kde K je konstanta. Všechna řešení rovnice (1) jsou určena rovnicí

$$y(x) = Ke^{-2(\sqrt{x^3})/3} + 3\sqrt{x^3} - \frac{9}{2}, x \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Pro funkci z , která je řešením dané Cauchyovy úlohy, musí tedy platit

$$z(x) = Ke^{-2(\sqrt{x^3})/3} + 3\sqrt{x^3} - \frac{9}{2},$$

$$\left(z(1) = -\frac{3}{2} \right) Ke^{-2/3} + 3 - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2},$$

z čehož plyne, že $K = 0$.

Řešením dané úlohy je funkce

$$\underline{z(x) = 3\sqrt{x^3} - \frac{9}{2}, x \in \langle 0, +\infty \rangle.}$$

4.1.48 Určete řešení $z(x)$ Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2} \quad (1)$$

s počáteční podmínkou $z(0) = 4$.

Řešení:

Funkce $p(x) = -2x, q(x) = 2xe^{x^2}$ jsou definované a spojité na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Je tedy zajištěna existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro libovolnou počáteční podmínku.

Řešení rovnice (1) budeme hledat ve tvaru $y(x) = h(x)g(x)$. Dosadíme-li za y a za $y' = h'g + hg'$ do rovnice (1), dostaneme diferenciální rovnici

$$h'g + hg' - 2xhg = 2xe^{x^2}$$

neboli

$$h'g + h(g' - 2xg) = 2xe^{x^2}. \quad (2)$$

Funkci g zvolíme tak, aby druhý člen na levé straně rovnice (2) byl roven nule, tj. tak, aby splňovala rovnici

$$g' - 2xg = 0. \quad (3)$$

Rovnice (3) je diferenciální rovnicí se separovatelnými proměnnými, jejímž řešením je např. funkce $g(x) = e^{x^2}$ (zvolili jsme integrační konstantu rovnou jedné). Dosadíme-li $g(x) = e^{x^2}$ do rovnice (2), dostaneme opět diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými pro neznámou funkci h :

$$h'e^{x^2} = 2xe^{x^2}.$$

Řešením rovnice (4) jsou všechny funkce $h(x) = x^2 + C$, kde C je konstanta.

Všechna řešení rovnice (1) jsou tedy určena rovnicí

$$y(x) = (x^2 + C)e^{x^2}, x \in \mathbf{R}.$$

Řešení z Cauchyovy úlohy má splňovat počáteční podmínku $y(0) = 4$, z čehož plyne, že $C = 4$. Řešení z je tedy určeno rovnicí

$$\underline{z(x) = (x^2 + 4)e^{x^2}, x \in \mathbf{R}.}$$

4.1.49 Určete řešení $z(x)$ Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$y' + 2y = q(x), \quad (1)$$

kde

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \forall x \in (-\infty, 1) \\ x-1 & \text{pro } \forall x \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$$

při počáteční podmínce $z(0) = 1$.

Řešení:

Snadno ověříme, že řešení dané úlohy existuje a je jediné.

Protože počáteční hodnota $x = 0$ leží v intervalu $(-\infty, 1)$, určíme nejdříve v tomto intervalu řešení z_1 Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$y' + 2y = 0 \quad (1')$$

s počáteční podmínkou $z_1(0) = 1$. Řešením této úlohy je funkce $z_1(x) = e^{-2x}$, $x \in (-\infty, 1)$. Na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ je pravá strana rovnice (1) definována funkcí $q(x) = x - 1$. Řešíme tedy dále rovnici

$$y' + 2y = x - 1 \quad (1'')$$

na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ s počáteční podmínkou, kterou získáme z podmínky spojitosti řešení z na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Označíme-li z_2 řešení rovnice (1'') na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$, musí platit $z_1(1) = z_2(1)$. Protože $z_1(1) = e^{-2}$, řešíme rovnici (1'') s počáteční podmínkou $z_2(1) = e^{-2}$.

Řešení rovnice (1'') hledáme ve tvaru $y = hg$. Po dosazení do této rovnice dostaneme

$$h'g + h(g' + 2g) = x - 1.$$

Položíme-li činitele $g' + 2g$ rovného nule, dostaneme stejnou rovnici, jako je rovnice (1'). Za funkci g lze zvolit $g(x) = e^{-2x}$. Z rovnice (2) pak plyne, že $h' = (x-1)e^{2x}$, a tedy

$$h(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2x} + C.$$

Konstantu C určíme z počáteční podmínky $z_2(1) = e^{-2}$:

$$z_2(1) = Ce^{-2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = e^{-2}.$$

Z poslední rovnice vypočteme $C = \frac{1}{4}(4 + e^2)$. Pro řešení z dané úlohy platí $z(x) = z_1(x)$ pro $\forall x \in (-\infty, 1)$ a $z(x) = z_2(x)$ pro $\forall x \in \langle 1, +\infty \rangle$. Funkce $z(x)$ je tedy určena rovnicemi

$$z(x) = \begin{cases} e^{-2x} \\ \frac{1}{4}(4 + e^2)e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{pro} \quad \begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ x \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$$

4.1.50 Určete řešení $z(x), w(x)$ Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$xy' - \frac{y}{x+1} = x \quad (1)$$

při počáteční podmínce: a) $z(1) = 1$ b) $w(0) = 1$.

Řešení:

Postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení rovnice

$$y' - \frac{y}{x(x+1)} = 1 \quad (2)$$

jsou splněny na oblastech $D_1 = (-\infty, -1) \times (-\infty, +\infty)$, $D_2 = (-1, 0) \times (-\infty, +\infty)$ a $D_3 = (0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$. Máme tedy zajištěnou existenci a jednoznačnost řešení v případě a) (bod $[1, 1] \in D_3$), nikoli však v případě b) (bod $[0, 1]$ neleží v žádné oblasti D_1, D_2, D_3). V případě b) úloha nemusí mít řešení.

Řešení rovnice (2) budeme hledat ve tvaru $y = gh$. Pak je

$$gh' + hg' - \frac{1}{x(x+1)}gh = 1$$

neboli

$$gh' + h\left(g' - \frac{1}{x(x+1)}g\right) = 1 \quad (3)$$

Funkci g zvolíme tak, aby splňovala rovnici

$$g' - \frac{1}{x(x+1)}g = 0. \quad (4)$$

Po separaci proměnných v rovnici (4) je

$$\frac{dg}{g} = \frac{dx}{x(x+1)}$$

a po integraci (zvolíme integrační konstantu rovnou jedné) získáme funkci $g(x) = x/(x+1)$. Dosadíme-li za g do rovnice (3), dostaneme diferenciální rovnici $h' = (x+1)/x$ a po integraci je $h(x) = x + \ln|x+C|$, kde C je konstanta a $x \neq 0$.

Všechna řešení rovnice (1) jsou určena rovnicí

$$y(x) = \frac{Cx}{x+1} + \frac{x}{x+1}(x + \ln|x|), \quad x \neq 0, \quad x \neq -1.$$

Řešením Cauchyovy úlohy je v případě a) funkce

$$z(x) = \frac{x}{x+1}(1 + x \ln x), \quad x \in (0, +\infty).$$

Konstantu $C = 1$ jsme určili z rovnice

$$z(1) = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2} = 1.$$

V případě za b) nemá Cauchyovy úloha řešení, neboť pro $x = 0$ není funkce $\ln|x|$ definována.

4.1.51 Určete řešení $z(x), w(x)$ Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} \tag{1}$$

při počáteční podmínce a) $z(0) = 1$; b) $w(\pi) = 1$.

Řešení:

Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici (1) je zajištěna na oblastech

$$D_k = \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right) \times (-\infty, +\infty), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Bod $[0,1]$ leží v oblasti D_0 , bod $[\pi,1]$ leží v oblasti D_1 , tedy řešení z a w existují a jsou jediná.

Řešení rovnice (1) hledáme ve tvaru $y = gh$, přičemž platí

$$h'g + h(g' - g \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}. \tag{2}$$

Funkci g určíme tak, aby splňovala rovnici $g' - g \operatorname{tg} x = 0$. Po separaci proměnných a integraci vybereme funkci $g(x) = 1/\cos x$ (integrační konstantu jsme zvolili rovnou jedné). Po dosazení do rovnice (2) dostaneme pro funkci h tuto podmínku:

$$h' \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x},$$

a tedy $h(x) = x + C$ pro $x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$, kde k je celé číslo. Na těchto intervalech jsou definována řešení rovnice (1) rovnicí

$$y(x) = \frac{x+C}{\cos x}.$$

Z daných počátečních podmínek vypočteme hodnoty konstanty C : a) $C = 1$, b) $C = -\pi - 1$.
 Řešení Cauchyovy úlohy v případě a) je určeno rovnicí

$$\underline{z(x) = \frac{x+1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),}$$

v případě b) rovnicí

$$\underline{w(x) = \frac{x - \pi - 1}{\cos x}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right).}$$

4.1.52 Určete řešení $z(x)$ Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$(1-x^2)y' + xy = 1 \tag{1}$$

Při počáteční podmínce $z(0) = 1$.

Řešení:

Rovnici (1) upravíme na tvar

$$y' + \frac{x}{1-x^2} y = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \neq \pm 1. \tag{2}$$

Protože v okolí bodu $[0,1]$ jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici (2), je zajištěna existence a jednoznačnost řešení dané úlohy pro rovnici (1).

Řešení rovnice (2) hledáme ve tvaru $y = gh$. Dosazením do rovnice (2) dostaneme podmínku pro funkce g , h ve tvaru

$$h'g + h\left(g' + g\frac{x}{1-x^2}\right) = \frac{1}{1-x^2}. \tag{3}$$

Funkci g zvolíme tak, aby splňovala rovnici

$$g' + g\frac{x}{1-x^2} = 0, \quad x \neq \pm 1.$$

Po separaci proměnných a po integraci vybereme funkci $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ (zvolili jsme integrační konstantu rovnou jedné). Dosadíme-li za g do rovnice (3), dostaneme rovnici

$$h' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

a po integraci rovnici

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C, \quad x \in (-1,1).$$

Řešení rovnice (1) je určeno rovnicí

$$y(x) = x + C\sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Řešením dané Cauchyovy úlohy je funkce

$$\underline{z(x) = x + \sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1,1).}$$

4.1.53 Řešte rovnici

$$y' + y = e^x. \quad (1)$$

Řešení:

Rovnici (1) vynásobíme funkcí μ a dostaneme

$$\mu y' + \mu y = \mu e^x. \quad (2)$$

Funkci μ zvolíme tak ,aby

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu y' + \mu y,$$

Z čehož plyne, že μ musí být řešením rovnice $\mu' = \mu$. Můžeme tedy zvolit $\mu(x) = e^x$ a rovnici (2) zapíšeme ve tvaru

$$\frac{d}{dx}(ye^x) = e^{2x}. \quad (3)$$

Po integraci rovnice (3) dostaneme $ye^x = \frac{1}{2}e^{2x} + C$, kde C je konstanta a po vynásobení funkcí e^{-x} lze řešení y rovnice (1) zapsat ve tvaru

$$\underline{y(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}, \quad x \in \mathbf{R}.}$$

4.1.54 Řešte rovnici

$$(x + \ln y)y' = 1. \quad (1)$$

Řešení:

Rovnici (1) lze zapsat ve tvaru

$$\frac{dx}{dy} - x = \ln y, \quad (2)$$

což je lineární rovnice prvního řádu vzhledem k proměnné x . Rovnici (2) vynásobíme funkcí $\mu(y)$ a dostaneme

$$\mu(y)\frac{dx}{dy} - \mu(y)x = \mu(y)\ln y. \quad (3)$$

Funkci $\mu(y)$ zvolíme tak, aby

$$\frac{d}{dy}(\mu(y)x) = \mu(y)\frac{dx}{dy} - \mu(y)x.$$

To znamená, že $\mu(y)$ musí být řešením rovnice $\mu' = -\mu$. Zvolíme tedy $\mu(y) = e^{-y}$. Pak rovnice (3) má tvar

$$\frac{d}{dy}(xe^{-y}) = e^{-y} \ln y$$

a po integraci dostaneme

$$xe^{-y} = \int e^{-y} \ln y dy + C,$$

kde C je konstanta. Řešení y rovnice (1) je určeno implicitně rovnicí

$$\underline{x = e^y \int e^{-y} \ln y dy + Ce^y}.$$

4.1.55 Najděte obecné řešení rovnice

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = e^x \sin x \quad (1)$$

Na intervalu $(k\pi, (k+1)\pi), k = 1, 2, \dots$

Řešení:

Funkce $p(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}, g(x) = e^x \sin x$ jsou na daném intervalu spojité. Rovnice bez pravé strany má tvar

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = 0$$

a na tomto intervalu má řešení $y = \sin x$. Nahradíme-li konstantu C funkcí $\alpha(x)$, máme

$$y = \alpha(x) \sin x \quad (2)$$

a dosadíme-li do (1) obdržíme pro $\alpha(x)$ diferenciální rovnici $\alpha'(x) = e^x$, jejíž integrací dostaneme $\alpha(x) = e^x + C$ a tedy

$$\underline{y = (e^x + C) \sin x}$$

je obecné řešení rovnice (1).