5.2 Trojný integrál a jeho výpočet

5.2.1 Vypočtěte objem tělesa T, jehož hranicí je elipsoid s poloosami a, b, c.

Řešení:

Počátek bude splývat se středem elipsoidu, osy elipsoidu budou ležet na osách souřadnic.

$$V(T) = \mu(T) = \iiint_T dxdydz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = ar\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = br\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = cr\cos\vartheta \\ J = abcr^2\sin\vartheta \end{array} \right| = \iiint_T abcr^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = abc \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{\frac{4}{3}\pi \, abc}$$

5.2.2 Nechť je Ω měřitelná množina v R^2, nechť jsou f, g funkce spojité v Ω. Nechť platí $g(x,y) \le f(x,y)$ v Ω. Pak těleso $T \subset R^3$, jehož hranici tvoří grafy funkcí f, g a část válcové plochy, jejíž řídící křivkou je hrΩ a jejíž povrchové přímky jsou rovnoběžné s osou z, je měřitelné. Ukažme, že platí $V(T) = \mu(T) = \iint_\Omega [f(x,y) - g(x,y)] dxdy.$

Řešení:

$$V(T) = \mu(T) = \iiint_T dxdydz = \iint_\Omega \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} dz \right] dxdy = \underline{\iint_\Omega [f(x,y) - g(x,y)] dxdy.}$$

5.2.3 Nechť S je rotační plocha, která vznikne rotací po částech hladké křivky

$$k \equiv \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle, \end{cases}$$

kolem osy x. Nechť platí $\dot\varphi(t) \ge 0$ a $\psi(t) \ge 0$ v intervalu $\langle a,b \rangle$, přičemž rovnosti platí nejvýše v konečném počtu bodů $t \in \langle a,b \rangle$. Pak rotační těleso T, jehož hranicí je plocha S, příp. spolu s částmi rovin x = a, x = b je měřitelné. Ukažme, že platí $V(T) = \mu(T) = \pi \int_a^b \psi^2(t) \dot\varphi(t) dt.$

Řešení:

Je-li speciálně x = t, je křivka k grafem funkce $y = \psi(x)$ a platí

$$V(T) = \mu(T) = \pi \int_a^b \psi^2(x) \, dx.$$

$$V(T)=\mu(T)=\iiint_T dxdydz=\left|\begin{array}{l}x=\varphi(t)\\ y=r\cos\varphi\\ z=r\sin\varphi\\ J=r\dot{\varphi}\end{array}\right|=\iiint_T r\dot{\varphi}\,dr\,d\varphi\,dt=\int_a^b\dot{\varphi}(t)\left[\iint_{\langle 0,\varphi(t)\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle} r\,dr\,d\varphi\right]dt=$$

$$=\pi\int_a^b\psi^2(t)\dot{\varphi}(t)dt.$$

Je-li speciálně $\varphi(t)=x$, dostáváme ihned

$$V(T)=\mu(T)=\pi\int_a^b\psi^2(x)\,dx.$$

5.2.4 Vypočtěte objem tělesa omezeného plochami

$S_1=\{[x,y,z], x^2+y^2-z^2=0\}$

$S_2=\{[x,y,z], x^2+y^2=6-z\}$

Řešení:

Obě plochy jsou rotační s osou rotace z. Platí $V(T)=\mu(T)=\mu(T_1)+\mu(T_2)$.

$$\mu(T_1)=\pi\int_2^6\left[\sqrt{(6-z)}\right]^2\,dz=8\pi$$

$$\mu(T_2)=\pi\int_0^2 z^2\,dz=\frac{8}{3}\pi$$

$$V(T)=\mu(T)=\mu(T_1)+\mu(T_2)=\frac{32}{3}\pi.$$

5.2.5 Určete těžiště krychle $T=\langle 0,a\rangle\times\langle 0,a\rangle\times\langle 0,a\rangle,\ a>0,$ je-li její hustota $\rho(x,y,z)=x^2y^4z^6$.

Řešení:

$$m(T)=\iiint_T\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_T x^2y^4z^6\,dx\,dy\,dz=\int_0^a x^2dx\cdot\int_0^a y^4dy\cdot\int_0^a z^6dz=\frac{a^{15}}{105}$$

$$S_{xy}(T)=\iiint_T z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_T x^2y^4z^7\,dx\,dy\,dz=\int_0^a x^2dx\cdot\int_0^a y^4dy\cdot\int_0^a z^7dz=\frac{a^{16}}{120}$$

$$S_{xz}(T)=\iiint_T y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_T x^2y^5z^6\,dx\,dy\,dz=\int_0^a x^2dx\cdot\int_0^a y^4dy\cdot\int_0^a z^7dz=\frac{a^{16}}{126}$$

$$S_{yz}(T)=\iiint_T x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_T x^3\,y^4\,z^6\;dx\,dy\,dz\;=\int_0^a x^2dx\cdot\int_0^a y^4dy\cdot\int_0^a z^7dz=\frac{a^{16}}{140}$$

$$x_t=\frac{S_{yz}}{m}=\frac{a^{16}}{140}\cdot\frac{105}{a^{15}}=\underline{\frac{3}{4}a}$$

$$y_t=\frac{S_{xz}}{m}=\frac{a^{16}}{126}\cdot\frac{105}{a^{15}}=\underline{\frac{5}{6}a}$$

$$z_t=\frac{S_{xy}}{m}=\frac{a^{16}}{120}\cdot\frac{105}{a^{15}}=\underline{\frac{7}{8}a}$$