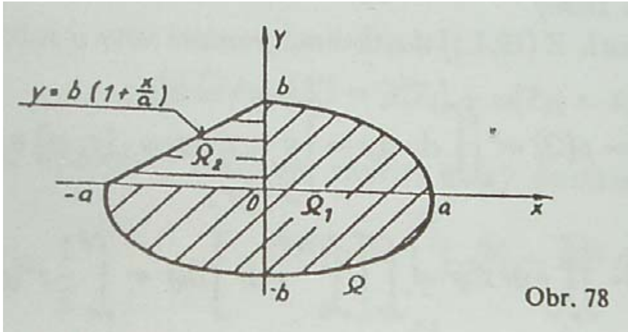
5.1 Dvojný integrál a jeho výpočet

5.1.1 Vypočtěte obsah $P(\Omega)$ obrazce Ω na obr. 78.



Obr. 78

Řešení:

$$P(\Omega)=\mu(\Omega)=\mu(\Omega_1)+\mu(\Omega_2)$$

$$\mu(\Omega_1)=\iint_{\Omega_1} dxdy=\left|\begin{array}{l} x=ar\cos\varphi \\ y=br\sin\varphi \\ J=abr \end{array}\right|=\iint_{\Omega_1} abr\,dr\,d\varphi=ab\int_0^1 r\left[\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right]dr=\frac{3}{4}\pi\,ab$$

$$\mu(\Omega_2)=\iint_{\Omega_2} dxdy=\int_{-a}^{0} r\left[\int_0^{b\left(1+\frac{x}{a}\right)} dy\right]dx=b\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{x}{a}\right)dx=b\left(a-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}ab$$

$$P(\Omega)=\mu(\Omega)=\mu(\Omega_1)+\mu(\Omega_2)=\frac{3}{4}\pi\,ab+\frac{1}{2}ab=\underline{\frac{1}{4}(3\pi+2)ab}$$

5.1.2 Nechť jsou funkce f, g spojité na intervalu $\langle a,b\rangle$; nechť platí $g(x)\le f(x)$ v $\langle a,b\rangle$. Pak obrazec Ω, jehož hranici tvoří grafy funkcí f, g a úsečky přímek x = a, x = b je měřitelná množina. Ukažme, že platí

$$P(\Omega)=\mu(\Omega)=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx.$$

Řešení:

$$P(\Omega)=\mu(\Omega)=\iint_{\Omega} dxdy=\int_a^b\left[\int_{g(x)}^{f(x)} dy\right]dx=\underline{\int_a^b [f(x)-g(x)]dx}$$

5.1.3 Nechť je funkce $r=r(\varphi)$ nezáporná a spojitá na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$; nechť $\beta-\alpha\le 2\pi.$ Ukážeme, že pro obsah rovinného obrazce Ω zadaného v polárních souřadnicích funkcí r, tj. omezeného obrazce, jehož hranici tvoří křivka $r=r(\varphi)$ a části polopřímek $\varphi=\alpha$ a $\varphi=\beta$, platí $P(\Omega)=\mu(\Omega)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$

Řešení:

$$P(\Omega)=\mu(\Omega)=\iint_{\Omega} dxdy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \right| = \iint_{\Omega} r\,dr\,d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{0}^{r(\varphi)} r\,dr\right]d\varphi = \underline{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi}$$

5.1.4 Najděte těžiště homogenní desky Ω, jejíž hranicí je kardioida
$k \equiv r = a(1+\cos\varphi),\ \varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle.$

Řešení:
Budeme předpokládat $\sigma = 1$.
Z polární rovnice křivky k vidíme, že platí $r(\varphi) = r(-\varphi),\ \varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle,$ a proto je křivka k i deska Ω souměrná podle osy x. Je tedy $S_x(\Omega) = 0,\ y_t = 0.$

$$m(\Omega) = \iint_{\Omega} dx\,dy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \right| = \iint_{\Omega} r\,dr\,d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{0}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr\right]d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \int_{0}^{\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2$$

$$S_y(\Omega) = \iint_{\Omega} x\,dx\,dy = \iint_{\Omega} r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\varphi\left[\int_{0}^{a(1+\cos\varphi)} r^2\,dr\right]d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\varphi(1+\cos\varphi)^3\,d\varphi = \frac{2a^3}{3}\int_{0}^{\pi}\left(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi\right)d\varphi = \frac{5}{4}\pi a^3$$

$$x_t = \frac{S_y}{m} = \underline{\frac{5}{6}a}.$$

5.1.5 Vypočtěte povrch (plášť) rotačního tělesa:

a) Katenoidu (vznikne rotací křivky $y = ach\dfrac{x}{a}$, kde a > 0, kolem osy *x*).

b) Elipsoidu, který vznikne rotací elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ kolem osy *x*.

Řešení:

a) $y = ach\dfrac{x}{a}$

$$S = 2\pi\int_{0}^{a} ach\frac{x}{a}\sqrt{1 + sh^2\frac{x}{a}}dx = 2\pi a\int_{0}^{a} ch^2\frac{x}{a}dx = 2\pi a\int_{0}^{a}\frac{1 + ch\frac{2x}{a}}{2}dx = \pi a\left[x + \frac{a}{2}sh\frac{2x}{a}\right]_0^a =$$

$$= \pi a\left(a + \frac{a}{2}sh2 - \frac{a}{2}sh0\right) = \underline{\pi a^2\left(1 + \frac{sh2}{2}\right)}$$

b) $x = a\cdot\cos t \qquad y = b\cdot\sin t \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

$$S = 2\pi\int_{0}^{2\pi} b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = 2\pi b\int_{0}^{\pi}\sin t\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$=\left|\begin{matrix} x=\cos t \\ dx=-\sin t dt\end{matrix}\right| = 2\pi b\int_{-1}^{1}\sqrt{a^2-\left(a^2-b^2\right)x^2}\,dx = 2\pi b\sqrt{a^2-b^2}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}-x^2}\,dx =$$

$$=\left|\begin{matrix} x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin y \\ dx=x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos dy\end{matrix}\right| = 2\pi b\sqrt{a^2-b^2}\int\sqrt{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^2 y}\cos dy =$$

$$=2\pi ab\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\int\cos^2 y dy = \underline{2\pi ab\cdot\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}-\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^4}}}$$

5.1.6 Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami:

a) parabolou $y = 6x - x^2$ a osou x.

$$P=\int_0^6\left(6x-x^2\right)dx=\left[\frac{6}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=\underline{36}$$

b) parabolou $y^2 = 2px$ a přímkou $x - 2y - 1 = 0$, $p \rangle 0$.

$$P=\int_0^1\left(\sqrt{2px}-\frac{x-1}{2}\right)dx=\sqrt{2p}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)dx=\sqrt{2p}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1=$$

$$=\underline{\sqrt{2p}\,\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}$$