4.1 Řešení základních typů diferenciálních rovnic 1.řádu

4.1.8 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $\left(x + x\,y^2\right)y' - 3 = 0$.

Řešení:

$$x\left(1 + y^2\right)\frac{dy}{dx} = 3$$

$$\int \left(1 + y^2\right) dy = \int \frac{3}{x}\,dx \qquad x \neq 0$$

$$y + \frac{y^3}{3} = 3\ln|x| + \ln|C|$$

$$\underline{e^{y + \frac{y^3}{3}} = C\,x^3}$$

4.1.9 Určete partikulární řešení diferenciální rovnice $xy' - y + y^2 = 0$ s počáteční podmínkou $y(2) = 2$.

Řešení:

$$x\frac{dy}{dx} = y - y^2$$

$$\int \frac{dy}{y - y^2} = \int \frac{dx}{x} \qquad \frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| - \ln|y-1| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = \ln|C\,x|$$

$$\frac{y}{y-1} = C\,x$$

$$y = \frac{C\,x}{C\,x - 1} \quad \textit{obecné řešení}$$

$$2 = \frac{C\cdot 2}{C\cdot 2 - 1} \Rightarrow k = -1$$

$$y = \underline{\frac{x}{x-1}} \quad \textit{partikulární řešení}$$

4.1.10 Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $x\,y' = x - y$.

Řešení:

$$y' = \frac{x-y}{x} \qquad x \neq 0$$

$$y' = 1 - \frac{y}{x} \qquad u = \frac{y}{x},\ \ y = u\,x,\ \ y' = \frac{du}{dx}x + u$$

$$x\frac{du}{dx} + u = 1 - u$$

$$\int \frac{du}{1-2u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u| = \ln|x| + \ln|K|$$

$$-\ln|1-2u| = 2\ln|x| + \ln C$$

$$\frac{1}{1-2u} = C\,x^2$$

$$u = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{C\,x^2}\right) \ \Rightarrow\ \underline{y = \frac{1}{2}x\left(1 - \frac{1}{C\,x^2}\right)}$$

4.1.11 Řešte Cauchyho úlohu $2\,x\,y' + y - 3\,x = 0$, $y(1) = 2$.

Řešení:

$$2\,x\,y' + y = 3\,x$$

Nejprve řešíme bez pravé strany.

$$2\,x\,y' + y = 0$$

$$2\,x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{2}{y}dy + \frac{1}{x}dx = 0$$

$$2\int\frac{1}{y}\,dy + \int\frac{1}{x}dx = K$$

$$2\ln|y| + \ln|x| = \ln|K|$$

$$y^2 = \frac{K}{x} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{K}{x}} \Rightarrow y = C\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

Dále řešíme metodou variace konstanty.

$$y = \alpha(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \alpha'(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha(x)\cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

Dosadíme do základní rovnice.

$$2x\cdot\alpha'(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}-x\alpha(x)\cdot x^{-\frac{3}{2}}+\alpha(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}=3x$$

$$2x\cdot\alpha'(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}=3x$$

$$\alpha'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha(x)=\frac{3}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx \;\Rightarrow\; \alpha(x)=x^{\frac{3}{2}}+konst.$$

$$y=\left(x^{\frac{3}{2}}+konst.\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y(1)=\left(1^{\frac{3}{2}}+konst.\right)\cdot 1^{-\frac{1}{2}}=2 \;\Rightarrow\; konst.=1$$

$$y=\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

4.1.12 Řešte Cauchyho úlohu $x\,y'+y=\cos x$, $y(\pi)=1$.

Řešení:

Nejprve řešíme bez pravé strany.

$$x\,y'+y=0$$

$$x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$\frac{1}{y}dy+\frac{1}{x}dx=0$$

$$2\int\frac{1}{y}\,dy+\int\frac{1}{x}dx=K$$

$$\ln|y|+\ln|x|=\ln|K|$$

$$y=\frac{K}{x}$$

Dále řešíme metodou variace konstanty.

$$y=\frac{\alpha(x)}{x}$$

$$y'=\frac{\alpha'(x)}{x}-\frac{\alpha(x)}{x^2}$$

$$x\cdot\left(\frac{\alpha'(x)}{x}-\frac{\alpha(x)}{x^2}\right)+\frac{\alpha(x)}{x}=\cos x$$

$$\alpha'(x)-\frac{\alpha(x)}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}=\cos x$$

$$\alpha'(x)=\cos x$$

$\alpha(x) = \sin x + konst.$

$$y = \frac{\sin x + konst.}{x}$$

$$y(\pi) = \frac{\sin \pi + konst.}{\pi} = 1 \;\Rightarrow\; konst. = \pi$$

$$\underline{y = \frac{\sin x + \pi}{x}}$$

4.1.13 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x^2\, y' + y^2 = 0$.

<u>Řešení:</u>

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$$\frac{1}{y^2} dy + \frac{1}{x^2} dx = 0$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy + \int \frac{1}{x^2} dx = C$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = C$$

$$\underline{y = \frac{x}{C\,x - 1}}$$

4.1.14 Najděte obecné řešení rovnice $y' - \dfrac{\cos x}{\sin x} y = e^x \sin x$ na intervalu $(k\pi, (k+1)\pi),\ k \in N.$

<u>Řešení:</u>

Nejprve řešíme bez pravé strany.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\cos x}{\sin x} y = 0$$

$$\frac{1}{y} dy - \frac{\cos x}{\sin x} dx = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = C$$

$$\ln|y| - \ln|\sin x| = C$$

$$y = C \sin x$$

Dále řešíme metodou variace konstanty.

$y = \alpha(x)\sin x$

$y' = \alpha'(x)\sin x + \alpha(x)\cos x$

$\alpha'(x)\sin x + \alpha(x)\cos x - \dfrac{\cos x}{\sin x}\alpha(x)\sin x = e^x \sin x$

$\alpha'(x) = e^x$

$\alpha(x) = \int e^x\,dx = e^x + K$

$\underline{y = \left(e^x + K\right)\sin x}$

4.1.15 Řešte Cauchyho úlohu $y' - \dfrac{3}{x}y = x^4\, e^{-x^2}$, $y(1) = \dfrac{1}{2e}$.

Řešení:

Nejprve řešíme bez pravé strany.

$y' - \dfrac{3}{x}y = 0$

$\dfrac{1}{y}dy - 3\dfrac{1}{x}dx = 0$

$\int \dfrac{1}{y}dy - 3\int \dfrac{1}{x}dx = C$

$\ln|y| - 3\ln|x| = C$

$y = C\,x^3$

Dále řešíme metodou variace konstanty.

$y = \alpha(x)x^3$

$y' = \alpha'(x)x^3 + \alpha(x)3x^2$

$\alpha'(x)x^3 + \alpha(x)3x^2 - 3\dfrac{\alpha(x)x^3}{x} = x^4\, e^{-x^2}$

$\alpha'(x) = x\,e^{-x^2}$

$$\alpha(x) = \int x\,e^{-x^2}dx = \left[\begin{array}{ll} \textit{substituce}: & \\ -x^2 & = z \\ x\,dx & = -\dfrac{dz}{2} \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int e^z\,dz = -\frac{1}{2}e^z + K = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + K$$

$\underline{y = \left(-\dfrac{1}{2}e^{-x^2} + K\right)\cdot x^3}$

4.1.16 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ a řešte poté Cauchyho úlohu pro počáteční podmínky y(0) = 0, y´(0) = 1.

Řešení:

Nejprve řešíme bez pravé strany.

$y'' - 2y' + y = 0$

Charakteristická rovnice je:

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1$

$\varphi_1(x) = e^x$

$\varphi_2(x) = x e^x$

Obecné řešení homogenní rovnice je:

$\underline{y_H = C_1(x) e^x + C_2\ x e^x}$

$C_1^{/}(x)\varphi_1(x) + C_2^{/}(x)\varphi_2(x) = 0$

$\underline{C_1^{/}(x)\varphi_1^{/}(x) + C_2^{/}(x)\varphi_2^{/}(x) = f(x)}$

$C_1^{/}(x) e^x + C_2^{/}(x) x e^x = 0$

$\underline{C_1^{/}(x) e^x + C_2^{/}(x) e^x + C_2^{/}(x) x e^x = \frac{e^x}{1+x^2}}$

$C_1^{/}(x) = -C_2^{/}(x)$

$\underline{C_1^{/}(x) + (1+x) C_2^{/}(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

$C_2^{/}(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$C_2(x) = arctg\, x + K_2$

$C_1^{/}(x) = -\frac{x}{1+x^2}$

$C_1(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + K_1$

Partikulární řešení je:

$y_P = -\frac{1}{2} e^x \ln\left(1+x^2\right) + x e^x\, arctg\, x$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je:

$y = y_H + y_P$

$\underline{y = e^x\left(C_1 + x C_2\right) + e^x\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + x\, arctg\, x\right)}$

Cauchyho úloha:

$y(0) = C_1 = 0$

$y^{/}(0) = e^x\left(C_1 + x C_2\right) + C_2\ e^x + e^x\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + x\, arctg\, x\right) +$

$+ e^x\left(-\frac{1}{2}\ \frac{2x}{1+x^2} + arctgx + \frac{x}{1+x^2}\right)$

$y^{/}(0) = C_1 + C_2 = 1 \ \Rightarrow\ C_2 = 1$

$\underline{y = x e^x + e^x\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + x\, arctg\, x\right)}$

4.1.17 Řešte diferenciální rovnici $y'' + 4y' + 4y = 0$.

<u>Řešení:</u>
Charakteristická rovnice je:

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = -2$

$\underline{y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}}$

4.1.18 Řešte diferenciální rovnici $y'' + 2y' + 5y = 0$.

<u>Řešení:</u>
Charakteristická rovnice je:

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda_1 = -1 + 2i$

$\lambda_2 = -1 - 2i$

$\underline{y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x}$

4.1.19 Řešte diferenciální rovnici $y'' + y' - 2y = 0$.

<u>Řešení:</u>
Charakteristická rovnice je:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = 1$

$\underline{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}}$

4.1.20 Řešte diferenciální rovnici $y'' + 2y' = 0$.

<u>Řešení:</u>
Charakteristická rovnice je:

$\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -2$

$\underline{y = C_1 + C_2 e^{-2x}}$

4.1.21 Řešte diferenciální rovnici $y'' + 4y = 2x^2 - x$.

<u>Řešení:</u>
Charakteristická rovnice je:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$
$$\lambda_1 = 2i$$
$$\lambda_2 = -2i$$
$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$$
$$C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0$$
$$\underline{C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x)}$$
$$C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \qquad \Rightarrow \quad C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$
$$\underline{C_1'(x)\cdot(-2)\sin 2x + C_2'(x)\cdot 2\cos 2x = 2x^2 - x}$$
$$2C_2'(x)\frac{(\sin 2x)^2}{\cos 2x} + 2C_2'(x)\cos 2x = 2x^2 - x$$
$$C_2'(x)\left(\frac{2}{\cos 2x}\right) = 2x^2 - x$$
$$C_2'(x) = \left(\frac{\cos 2x}{2}\right)(2x^2 - x) = x^2\cos 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x$$
$$\underline{C_1'(x) = -\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)(2x^2 - x) = -x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x}$$
$$C_2(x) = \int\left(x^2\cos 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x\right)dx$$
$$\int x^2\cos 2x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos 2x & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \int x\sin 2x\,dx =$$
$$= \left|\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin 2x & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin 2x +$$
$$+\frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + k$$
$$\int\frac{1}{2}x\cos 2x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos 2x & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right| = \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int\sin 2x\,dx = \frac{1}{4}x\sin 2x +$$
$$+\frac{1}{8}\cos 2x + k$$
$$C_2(x) = \int\left(x^2\cos 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x\sin 2x -$$
$$-\frac{1}{8}\cos 2x + K_2$$

$$C_1(x)=\int\left(-x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x\right)dx$$

$$\int\frac{1}{2}x\sin 2x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=x & u'=1 \\ v'=\sin 2x & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right|=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{4}\int\cos 2x\,dx\ =-\frac{1}{4}x\cos 2x+$$

$$+\frac{1}{8}\sin 2x+k$$

$$\int x^2\sin 2x\;dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^2 & u'=2x \\ v'=\sin 2x & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right|=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\int x\cos 2x\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x & u'=1 \\ v'=\cos 2x & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right|=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+$$

$$+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+k$$

$$C_1(x)=\int\left(-x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x\right)dx=+\frac{1}{2}x^2\cos 2x-\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+$$

$$+\frac{1}{8}\sin 2x+K_1$$

$$y=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$$

$$y=\left(\frac{1}{2}x^2\cos 2x-\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+K_1\right)\cos 2x+$$

$$+\left(\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+K_2\right)\sin 2x=$$

$$=\underline{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}+K_1\cos 2x+K_2\sin 2x}$$

4.1.22 Řešte diferenciální rovnici $y''+2y'=x$.

Řešení:

Charakteristická rovnice je:

$$\lambda^2+2\lambda=0$$

$$\lambda_1=0$$

$$\lambda_2=-2$$

$$\underline{y=C_1+C_2e^{-2x}}$$

$$C_1' + C_2' e^{-2x} = 0$$

$$\underline{-2C_2' e^{-2x} = x} \qquad \Rightarrow \quad C_2' = -\frac{1}{2} x e^{2x}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\int x e^{2x} dx = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{2x} & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} x\, e^{2x} + \frac{1}{4}\int e^{2x} dx = -\frac{1}{4} x\, e^{2x} + \frac{1}{8} e^{2x} + K_2$$

$$C_1' = \frac{1}{2} x \qquad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{x^2}{4} + K_1$$

$$\underline{y = K_1 + K_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}}$$

4.1.23 Řešte diferenciální rovnici $y'' - 2y' + y = (x+1)e^{2x}$.

Řešení:
Charakteristická rovnice je:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

$$\underline{y = C_1 e^x + C_2\, x e^x}$$

$$C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \qquad \Rightarrow \quad C_1' = -C_2' x$$

$$\underline{C_1' e^x + C_2' e^x + C_2' x e^x = (x+1)e^{2x}}$$

$$C_2' = x e^x + e^x$$

$$C_2 = \int x e^x\, dx + \int e^x\, dx = \left(x e^x - e^x\right) + e^x + K_2 = x e^x + K_2$$

$$C_1 = -\int x^2 e^x\, dx - \int x e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^x & v = e^x \end{vmatrix} = -x^2 e^x + \int x e^x dx = -x^2 e^x + x e^x - e^x + K_1$$

$$y = \left(-x^2 e^x + x e^x - e^x + K_1\right)e^x + \left(x e^x + K_2\right)x e^x$$

$$\underline{y = x e^{2x} - e^{2x} + K_1 e^x + K_2\, x e^x}$$

4.1.24 Řešte diferenciální rovnici $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

Řešení:
Charakteristická rovnice je:

$$\lambda^2 - 1 = 0$$
$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -1$$
$$\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}}$$
$$C_1^/ \cdot e^x + C_2^/ \cdot e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1^/ \cdot e^x = - C_2^/ \cdot e^{-x}$$
$$\underline{C_1^/ \cdot e^x - C_2^/ \cdot e^{-x} = \frac{2e^x}{e^x - 1}}$$
$$C_2^/ = - \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$$
$$\underline{C_1^/ = \frac{1}{e^x - 1}}$$
$$C_2 = - \int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx = \left| \begin{array}{l} subst. \\ e^x - 1 = t \\ e^x \, dx = dt \end{array} \right| = - \int \frac{t+1}{t} dt = - \int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = - t - \ln|t| + K_2 =$$
$$= 1 - e^x - \ln\left|e^x - 1\right| + K_2$$
$$C_1 = \int \frac{1}{e^x - 1} dx = \left| \begin{array}{l} subst. \\ e^x - 1 = t \\ e^x \, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t \cdot (t+1)} \, dt$$
$$\frac{1}{t \cdot (t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(t+1)}$$
$$\underline{1 = At + A + Bt}$$
$$0 = A + B \Rightarrow A = - B$$
$$\underline{1 = A}$$
$$C_1 = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln|t| - \ln|t+1| + K_1 = \ln\left|e^x - 1\right| - \ln\left|e^x\right| + K_1$$
$$\underline{y = e^x \cdot \ln\left|e^x - 1\right| - e^x \cdot \ln\left|e^x\right| + e^x \cdot K_1 + e^{-x} - 1 - e^{-x} \cdot \ln\left|e^x - 1\right| + e^{-x} \cdot K_2}$$