3.1 Výpočet neurčitého integrálu

3.1.1 $\int(3-x^2)^3 = \int(27-2x^2+3x^4-x^6)dx = 27\int dx - 27\int x^2dx + 3\int x^4dx -$

$\int x^6dx = 27x - 27\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + c =$

$= \underline{27x - 9x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + c}$

3.1.2 $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)dx = \int x^{-2}dx - 2\int\frac{1}{x}dx + \int dx = -x^{-1} - 2\ln|x| + x + c =$

$= \underline{\frac{x^2-1}{x} - 2\ln|x| + c}$

3.1.3 $\int\left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx = a\int\frac{1}{x}dx + a^2\int x^{-2}dx + a^3\int x^{-3}dx = \underline{a\ln|x| - a^2x^{-1} - a^3\frac{1}{2}x^{-2} + c}$

3.1.4 $\int\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx = \int\left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{\frac{-1}{4}}\right)dx = \int x^{\frac{1}{4}}dx - 2\int x^{\frac{5}{12}}dx + \int x^{\frac{-1}{4}}dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} -$

$-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + c = \underline{\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + c}$

3.1.5 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{-5}{4}}\right)dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - (-4)x^{-\frac{1}{4}} + c = \underline{\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + 4\sqrt[4]{x} + c}$

3.1.6 $\int\frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}dx = \int\frac{\sqrt{x^8 + 1 + 2x^4}}{\sqrt{x^4}x^3}dx = \int\frac{\sqrt{(x^4+1)^2}}{x^5}dx = \int\frac{x^4+1}{x^5}dx = \int\frac{1}{x}dx + \int\frac{1}{x^5}dx =$

$= \underline{\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + c}$

3.1.7 $\int\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \underline{\arcsin x + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2} + c\right|}$

3.1.8 $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \int\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x+1-x+1}dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x+1}dx - \frac{1}{2}\int\sqrt{x-1}dx =$

$= \underline{\frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + c}$

3.1.9 $\displaystyle\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx=\int\left[\left(\frac{2}{10}\right)^x 2-\frac{1}{5}\left(\frac{5}{10}\right)^x\right]dx=2\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}}-\frac{1}{5}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+c=\underline{\frac{1}{5\cdot 2^x\ln 2}-\frac{2}{5^x\ln 5}+c}$

3.1.10 $\displaystyle\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int\frac{\left(e^x+1\right)\left(e^{2x}-e^x+1\right)}{e^x+1}dx=\int\left(e^{2x}-e^x+1\right)dx=$

$\displaystyle=\underline{\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+c}$

3.1.11

$\displaystyle\int\sqrt{1-\sin 2x}dx=\int\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}dx=\int\sqrt{\left(\sin x-\cos x\right)^2}dx=\int\left|\sin x-\cos x\right|dx$

a) $\sin x-\cos x\langle 0,\operatorname{sng}\left(\cos x-\sin x\right)=1,$

$\displaystyle\int\left|\sin x-\cos x\right|dx=\int-\left(\sin x-\cos x\right)dx=\cos x+\sin x+c$

b) $\sin x-\cos x\rangle 0,\operatorname{sng}\left(\cos x-\sin x\right)=-1,$

$\displaystyle\int\left|\sin x-\cos x\right|dx=\int\left(\sin x-\cos x\right)dx=-\cos x-\sin x+c$

výsledek : $\underline{\left(\sin x+\cos x\right)\operatorname{sng}\left(\cos x-\sin x\right)+c}$

3.1.12 $\displaystyle\int\operatorname{tg}^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\underline{\operatorname{tg}x-x+c},\ x\neq\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2},k\in Z$

3.1.13 $\displaystyle\int\operatorname{th}^2 x dx=\int\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}dx=\int\frac{\operatorname{ch}^2 x-1}{\operatorname{ch}^2 x}dx=\underline{-\operatorname{th}x+x+c}$

3.1.14 $\displaystyle\int x\left(1-x\right)^{10}dx=\int\left[x\left(1-x\right)^{10}-\left(1-x\right)^{10}+\left(1-x\right)^{10}\right]dx=\int\left(1-x\right)^{10}dx+\int\left(1-x\right)^{10}\left(x-1\right)dx=$

$\displaystyle=\int\left(1-x\right)^{10}dx-\int\left(1-x\right)^{11}dx=\underline{\frac{\left(1-x\right)^{12}}{12}-\frac{\left(1-x\right)^{11}}{11}+c}$

3.1.15 $\displaystyle\int\frac{x^2}{\left(1-x\right)^{100}}dx=\int\frac{x^2-1+1}{\left(1-x\right)^{100}}dx=\int\frac{-\left(1-x\right)\left(1+x\right)}{\left(1-x\right)^{100}}dx+\int\frac{1}{\left(1-x\right)^{100}}dx=$

$\displaystyle=-\left[\int\frac{1}{\left(1-x\right)^{99}}+\int\frac{-x}{\left(1-x\right)^{99}}+\int\frac{1}{\left(1-x\right)^{100}}\right]dx=\int\frac{dx}{\left(1-x\right)^{100}}-\int\frac{dx}{\left(1-x\right)^{99}}+\int\frac{-x+1-1}{\left(1-x\right)^{99}}dx=$

$\displaystyle=\int\frac{dx}{\left(1-x\right)^{100}}-2\int\frac{dx}{\left(1-x\right)^{99}}+\int\frac{dx}{\left(1-x\right)^{98}}=\underline{\frac{1}{99\left(1-x\right)^{99}}-\frac{2}{98\left(1-x\right)^{98}}+\frac{1}{97\left(1-x\right)^{97}}+c}$

3.1.16 $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{-3x+1-1}{\sqrt[3]{1-3x}}dx=-\frac{1}{3}\int\left(1-3x\right)^{\frac{2}{3}}dx+\frac{1}{3}\int\left(1-3x\right)^{-\frac{1}{3}}dx=$

$\displaystyle\frac{1}{9}\frac{3}{5}\left(1-3x\right)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{9}\frac{3}{2}\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}+c=\underline{\frac{1}{15}\sqrt[3]{\left(1-3x\right)^5}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(1-3x\right)^2}+c}$

3.1.17 $\int \frac{1}{a+bx^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\frac{b}{a}x^2}\,dx$, $ab \neq 0$

$$1,\ \frac{b}{a}\rangle 0 \Rightarrow \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\frac{b}{a}x^2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{c}}x + c = \underline{\frac{\operatorname{sng} x}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}x + c}$$

$$2,\ \frac{b}{a}\langle 0 \Rightarrow \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\frac{b}{a}x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1-\left|\frac{b}{a}\right|x^2} = \frac{1}{a}\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}x}{1-\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}x}\right| + c =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sng} a}{\sqrt{|ab|}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}x}{\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}x}\right| + c}$$

3.1.18 $\int \frac{dx}{x^2-x+2} = \int \frac{dx}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1} =$

$$\frac{4}{7}\frac{\sqrt{7}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + c = \underline{\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + c}$$

3.1.19 $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$, $b \neq 0$

Df: $a+bx^2\rangle 0 \Rightarrow \quad 1, b\langle 0 \Rightarrow x^2\langle -\frac{a}{b} \Rightarrow a\rangle 0$

$\qquad 2, b\rangle 0 \Rightarrow x^2\rangle -\frac{a}{b} \Rightarrow a$ libovolné

ad 1, b<0, a>0

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(1+\frac{b}{a}x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left|\frac{b}{a}\right|x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{|b|}}\arcsin\sqrt{\frac{|b|}{a}}x + c = \underline{\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\sqrt{\frac{-b}{a}}x + c}$$

ad 2, b>0, a>0

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(1+\frac{b}{a}x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ln\left|\sqrt{\frac{b}{a}}x + \sqrt{1+\frac{b}{a}x^2}\right| + c_0 = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{\left|\sqrt{b}x+\sqrt{a+bx^2}\right|}{\sqrt{a}} + c_0 =$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\sqrt{b}x+\sqrt{a+bx^2}\right| + c}, \text{ kde } c = c_0 - \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\sqrt{a}$$

b>0, a<0

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(-a)\left(\frac{-b}{a}x^2-1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\sqrt{\frac{-a}{b}}\ln\left|\sqrt{\frac{b}{-a}}x+\sqrt{\frac{b}{-a}x^2-1}\right|+c_0 = \underline{\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\sqrt{b}x+\sqrt{bx^2+a}\right|+c},$$

kde $c = c_0 - \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\sqrt{-a}$

b>0, a=0

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{dx}{|x|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{b}}(\operatorname{sgn} x)\ln|x|+c}$$

3.1.20 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x+c = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x+c}$

3.1.21

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2-1+1}} = \int\frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \underline{\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c}$$

3.1.22

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}\right|+c_0 = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+c},$$

kde $c = c_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\sqrt{2}$

3.1.23 $\int\frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}} = \int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = 2\int\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2-1}} =$

$= \ln\left|(2x+1)+\sqrt{(2x+1)^2-1}\right|+c_0 = \underline{\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+c}$, kde $c = c_0+\ln 2$

3.1.24 $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{8}(16x^2-8x+16)}} = 2\sqrt{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(4x-1)^2+15}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(4x-1)^2}{15}+1}} =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{4x-1}{\sqrt{15}}+\sqrt{\frac{(4x-1)^2}{15}+1}\right|+c_0 = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}\right|+c},$

kde $c = c_0+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{4}{\sqrt{15}}$

3.1.25 $\int|x|dx$ pro $x\rangle 0$: $|x| = x \Rightarrow \int x dx = \frac{x^2}{2}+c$

pro $x\langle 0: |x| = -x \Rightarrow \int (-x)dx = -\frac{x^2}{2} + c$

výsledek pro $x \in R$: $\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2}\operatorname{sgn} x + c = \frac{x|x|}{2} + c$

3.1.26 $\int |x| x dx$ pro $x\rangle 0: |x| = x \Rightarrow \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

pro $x\langle 0: |x| = -x \Rightarrow \int (-x^2)dx = -\frac{x^3}{3} + c$

výsledek pro $x \in R$: $\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3}\operatorname{sgn} x + c = \frac{x^2|x|}{3} + c$

3.1.27 $\int \left(x + |x|^2\right)dx$ pro $x\rangle 0: |x| = x \Rightarrow \int (2x)^2 dx = \frac{4x^3}{3} + c$

pro $x\langle 0: |x| = -x \Rightarrow \int 0 dx = c$

výsledek pro $x \in R$: $\mathrm{F}(x) = \frac{2x^3}{3}\left(x + |x|\right) + c$

3.1.28 $\int e^{-|x|}dx$ pro $x\rangle 0: |x| = x \Rightarrow \int e^{-x}dx = -e^{-x} + c_1$

pro $x\langle 0: |x| = -x \Rightarrow \int e^{x}dx = e^{x} + c_2$

výsledek pro $x \in R$: $\begin{matrix} \mathrm{F}(x) = -e^{-x} + 1 + c, \\ \mathrm{F}(x) = e^{-x} - 1 + c, \end{matrix}$ pro $\begin{matrix} x \in (0, \infty) \\ x \in (-\infty, 0) \end{matrix}$, $F(x) = \lim\left(e^{x} - 1 + c\right) = c$

3.1.29 Je dána okamžitá rychlost v pohybu bodu po přímce (ose) x v rovnici $v(t) = 2t + 1, t \in \langle 0, +\infty)$. Najděme zákon dráhy pohybu, je-li známo, že v čase $t = 0$ měl bod polohu $x = x_0$.

Řešení: Označíme-li $x(t)$ polohu bodu v okamžiku *t*, pak $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Hledáme tedy funkci $x = x(t)$, pro niž platí $\frac{dx}{dt} = 2t + 1, x(0) = x_0$. Je ihned patrno, že první podmínce vyhovuje nekonečně mnoho funkci $x = t^2 + t + C$, (1.1) kde C je libovolná konstanta. Funkce, která splňuje i druhou podmínku (říkáme jí též počáteční podmínka), najdeme z rovnice (1.1) dosazením dané podmínky *t=0,* $x = x_0$. Dostaneme . Dosazením do (1.1) za C plyne pro hledaný zákon dráhy $x = t^2 + t + x_0$.
Jednoduchou zkouškou se přesvědčíme, že tato funkce splňuje obě dané podmínky, a zároveň vidíme, že hledaná funkce daných vlastností je jediná.

3.1.30 $\int \left(2\cos x + \left(\sqrt{3}\right)x^3 - \frac{5}{1 + x^2}\right)dx = 2\int \cos x dx + \left(\sqrt{3}\right)\int x^3 dx - 5\int \frac{dx}{1 + x^2} = \underline{2\sin x +}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}x^4 - 5\operatorname{arctg} x + c, x \in (-\infty, +\infty)$

3.1.31 $\int \frac{(x-1)^2}{x^3}dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x^3}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)dx = \underline{\ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}} + c, x \neq 0$

3.1.32 $\int(6x^3 - 2x + 3)dx = 6\int x^2 dx - 2\int x dx + 3\int dx = \underline{\frac{3}{2}x^4 - x^2 + 3x + c}$

3.1.33. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int x^{\frac{7}{8}} = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + c = \underline{\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7} + c}$

3.1.34 $\int(x^2+3)^2 dx = \int x^4 dx + 6\int x^2 dx + 9\int dx = \underline{\frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 9x + c}$

3.1.35 $\int \frac{x^3+1}{x+1}dx = \int(x^2 - x + 1)dx = \int x^2 dx - \int x dx + \int dx = \underline{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c}$

3.1.36 Dokažte, že funkce $F: y = \sin^2 x$, $G: y = -\frac{\cos 2x}{2}$ jsou primitivní k téže funkci f v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Najděte funkci f a konstantu, o kterou se primitivní funkce liší.

Řešení:

Snadno zjistíme, že platí:

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$
$$\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)2 = \sin 2x$$

Funkce F a G jsou primitivní k funkci $\underline{f: y = \sin 2x}$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Abychom našli konstantu *c*, o kterou se primitivní funkce liší, upravme např. $G(x)$.

$$G(x) = -\frac{\cos 2x}{2} = -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} = -\frac{1 - 2\sin^2 x}{2} = -\frac{1}{2} + \sin^2 x = -\frac{1}{2} + F(x)$$

Pro všechna $x \in (-\infty, +\infty)$ tedy platí $\underline{F(x) = G(x) + \frac{1}{2}}$.

3.1.37 Najděte všechny primitivní funkce k funkci:

a) $f: y = \frac{x}{\sqrt{x}}$

b) $f: y = \dfrac{\sqrt{x} - 3x^3 + x\cos x}{x}$

c) $f: y = \dfrac{1}{1+\cos 2x}$

Řešení:

a) Víme, že k funkci $f: y = x^n$, kde $n \in R - \{1\}$ je v intervalu $(0,+\infty)$ primitivní funkce

$$F: y = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Proto

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}} dx = \int x \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c, \quad \text{v intervalu } (0,+\infty).$$

b) Užitím věty o primitivní funkci součtu funkcí a užitím vztahů pro primitivní funkce (neurčité integrály) elementárních funkcí dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{x} - 3x^3 + x\cos x}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx - 3\int x^2 dx + \int \cos x dx = 2\sqrt{x} - x^3 + \sin x + c,$$

v intervalu $(0,+\infty)$.

c) primitivní funkce existuje v každém intervalu, v němž jmenovatel $1+\cos 2x$ je různý od nuly, tj. ve sjednocení všech intervalů $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, kde $k \in Z$. V tomto definičním oboru platí

$$\int \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int \frac{dx}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} tgx + c.$$

3.1.38

a) Určete rovnici křivky, která prochází bodem $A[-2,1]$ a jejíž tečna v libovolném jejím bodě má směrnici $2x+5$.

b) Vyjádřete závislost dráhy tělesa na čase na čase *t*, je-li v čase 0 *s* jeho dráha i rychlost nulová a platí-li pro jeho zrychlení $a = -\sin t$.

Řešení:

a) Nechť $y = F(x)$ je rovnice hledané křivky. Funkci F máme určit tak, aby $F'(x) = 2x+5$. Funkce *F* je tedy primitivní funkce k funkci $f: y = 2x+5$, takže

$$F(x) = \int (2x+5) dx = x^2 + 5x + c.$$

Dále platí $F(-2)=1$, čili 4 – 10 + c = 1, odkud c = 7.
Rovnice hledané křivky je $y = x^2 + 5x + 7$.

b) V této úloze budeme pracovat pouze s číselnými hodnotami času, dráhy, rychlosti a Zrychlení, přitom pro lepší orientaci je označíme tradičně písmeny *t, s, v, a.*
Víme, že platí $a = v'(t)$, proto
$$v = \int (-\sin t)dt = \cos t + c.$$
V čase $t = 0$ je $v = 0$, platí tedy $\cos 0 + c = 0$, odkud $c = -1$. Tím dostáváme
$v = \cos t - 1$.

Dále víme, že $v = s'(t)$, takže
$$s = \int (\cos t - 1)dt = \sin t - t + c.$$
V čase $t = 0$ je $s = 0$, tedy $\sin 0 - 0 + c = 0$,odkud $c = 0$. Hledanou závislost vyjadřuje rovnice $s = \sin t - t$.

3.1.39 V intervalu $(-\infty,+\infty)$ vypočtěte:
a) $\int x \sin x dx$
b) $\int \sin^2 x dx$

<u>Řešení:</u>
Obě části úlohy řešíme užitím integrace per partes.
a) Položme $f(x) = x,\ g'(x) = \sin x,$ takže $f'(x) = 1,\ g(x) = -\cos x.$ Pak platí
$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c.$$

b) Zapíšeme $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ a položíme $f(x) = \sin x,\ g'(x) = \sin x$, takže $f'(x) = \cos x,\ g(x) = -\cos x.$ Potom platí
$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx + c = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)dx + c =$$
$$= -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x dx + c = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx + c.$$

Tím jsme získali rovnici
$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx + c,$$

v níž je neznámou právě hledaný integrál. Z této rovnice dostaneme
$$2\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + c,$$

tedy

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x + c).$$

3.1.40 Vypočtěte neurčité integrály a stanovte definiční obory integrandů:

a) $\int \cos(3x-1)dx$

b) $\int \sqrt{1+3x}dx$

Řešení:

Obě části úlohy budeme řešit substituční metodou typu $g(x)=t$.

a) Položme
$g(x)=3x-1=t,\ g'(x)=3,\ dg(x)=g'(x)dx=3dx=dt,\ \cos(3x-1)=\cos t=f(t),$ přičemž $(\alpha;\beta)=(a;b)=R.$ Dále platí:

$$\int f[g(x)]\cdot g'(x)dx = \int \cos(3x-1)\cdot 3dx = \int \cos t dt,$$

odtud

$$\int \cos(3x-1)dx = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + c.$$

Po dosazení $t=3x-1$ získáme

$$\int \cos(3x-1)dx = \frac{1}{3}\sin(3x-1)+c.$$

b) Položme $g(x)=1+3x=t,\ g'(x)=3,\ dg(x)=g'(x)dx=3dx=dt,\ \sqrt{1+3x}=\sqrt{t}=f(t),$ přičemž $(\alpha;\beta)=(0,+\infty),\quad (a,b)=\left(-\frac{1}{3};+\infty\right).$

Potom v intervalu $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$ platí

$$\int \sqrt{1+3x}\cdot 3dx = \int \sqrt{t}dt,$$

Odtud

$$\int \sqrt{1+3x}dx = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{9}t^{\frac{3}{2}}+c.$$

Po dosazení $t=1+3x$ obdržíme

$$\int \sqrt{1+3x}dx = \frac{2}{9}\int \sqrt{(1+3x)^3}+c.$$