1.4 Diferenciál funkce

1.4.1 Vypočítejte přibližně
a) $\ln 10{,}01$, když víte, že $\ln 10 = 2{,}30259$

Řešení:
f: $y = \ln x$
$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx$

$f(x_0) = f(10) = 2{,}30259$
$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x_0) = \frac{1}{10} = 0{,}1$
$dx = x - x_0 = 0{,}01$

$f(x_0 + dx) = 2{,}30259 + 0{,}001$
$\underline{\ln 10{,}01 = 2{,}30359}$

b) $\sqrt{16{,}06}$

f: $y = \sqrt{x}$
$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx$

$f(x_0) = f(16) = 4$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f'(x_0) = \frac{1}{8}$
$dx = x - x_0 = 0{,}06$

$f(x_0 + dx) = 4 + \frac{1}{8} \cdot 0{,}06 = 4 + 0{,}0075 = \underline{4{,}0075}$

1.4.2 Měřením byl zjištěn poloměr koule r = 2 cm s maximální odchylkou 0,01 cm. Jaké maximální chyby se dopustíme při výpočtu
a) objemu

Řešení:
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad V = 33{,}50\,cm^3$

$dV = V'\,dr = \frac{4}{3}\pi\, 3r^2\, dr = 4\pi r^2\, dr$

$\varepsilon = 4\pi\, 2^2\, 0{,}01 = 0{,}50\,cm^3$

Zapisujeme $\underline{V = (33{,}50 \pm 0{,}50)cm^3}$

Relativní chyba $\delta = \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\, dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3\,dr}{r} = 0{,}015 = \underline{1{,}5\,\%}$

b) povrchu

$S = 4\pi r^2 \quad S = 50{,}24\,cm^2$

$\varepsilon = dS = 4\pi\, 2\,r\,dr = 8\pi\, r\,dr = 0{,}50\,cm^2$

Zapisujeme $\underline{S = (50{,}24 \pm 0{,}50)cm^2}$

Relativní chyba $\delta = \frac{dS}{S} = \frac{8\pi\, r\,dr}{4\pi r^2} = \frac{2\,dr}{r} = 0{,}01 = \underline{1\%}$

1.4.3 Užitím diferenciálu funkce vypočtěte:

a) $\ln 0{,}965$

b) $\sqrt{9{,}02}$

c) $e^{0{,}024}$

d) $\sin 0{,}024$

Řešení:

a) $\ln 0{,}965 = \ln(1 + (-0{,}035)) = \ln 1 + \frac{1}{1}(-0{,}035) = \underline{-0{,}035}$

b) $\sqrt{9{,}02} = \sqrt{9 + 0{,}02} = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}02 = 3 + \frac{0{,}02}{6} = \underline{3{,}0033}$

c) $e^{0{,}024} = e^0 + e^{0{,}024} \approx 1 + 0{,}024 = \underline{1{,}024}$

d) $\sin 0{,}024 = \sin(0 + 0{,}024) = 0{,}024$

1.4.4 Za předpokladu, že u(x), v(x) jsou libovolné funkce proměnné x, stanovte diferenciál funkce

$a)\; y = u(x) + v(x),$

$b)\; y = u(x) \cdot v(x),$

$c)\; y = \frac{u(x)}{v(x)},$

$d)\; y = u^n(x),$

$e)\; y = f(u(x)).$

Řešení:

$a)\; y'\,dx = (u' + v')dx = u'\,dx + v'dx, \qquad dy = \underline{du + dv},$

$b)\; y'\,dx = (u'v + u\,v')dx = v\,u'\,dx + u\,v'dx, \qquad dy = \underline{v\,du + u\,dv},$

obdobně najdeme, že

$c)\ dy = \underline{\dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}}$,

$d)\ dy = \underline{n\,u^{n-1}du}$,

$e)\ dy = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dx} = \underline{f'(u)du}$.

1.4.5 Jak musíme přibližně změřit délku matematického kyvadla dlouhého l = 20cm, aby se doba kmitu zvětšila o 0,05s?

Řešení:

Doba kmitu matematického kyvadla je dána vztahem $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, kde gravitační zrychlení

$g = 981\ cm \cdot s^{-2}$. Odtud $l = \dfrac{T^2}{4\pi}\cdot g$, $dl = \dfrac{g}{4\pi^2}\,2T\,dT = \dfrac{g\,T}{2\pi^2}dT$.

Dosadíme-li za T obdržíme, že $dl = \dfrac{\sqrt{g\,l}}{\pi}dT = \underline{2{,}23\,cm}$.

Kyvadlo musíme prodloužit o 2,23cm.