1.2 Limita funkce

1.2.89 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}, \quad a \rangle 0$

Řešení:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a}}{\dfrac{x^\beta - a^\beta}{x - a}} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^\beta - a^\beta}{x - a}} = \frac{\alpha\, a^{\alpha - 1}}{\beta\, a^{\beta - 1}} = \underline{\frac{\alpha}{\beta}\, a^{\alpha - \beta}}.$$

1.2.90 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$

Řešení:

Výrazy v čitateli jsou dosti nesourodé. Mocniny nemají ani stejné základy ani stejné exponenty. Bude vhodné přičíst mocninu, která s jednou ze dvou právě zmíněných má stejný základ, a s druhou stejný exponent. Nabízí se tedy a^a nebo x^x. Konstanta je ale většinou přijatelnější než funkce. Použijeme proto a^a.

$$\lim_{x \to a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\left(a^x - a^a\right) + \left(a^a - x^a\right)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{a^x - a^a}{x - a} - \lim_{x \to a} \frac{x^a - a^a}{x - a} =$$

$$= a^a \ln a - a\, a^{a-1} = \underline{a^a \left(\ln a - 1\right)}$$

1.2.91 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^x - a^a}{x - a}$

Řešení:

Zde musíme začít podobně jako v předchozím příkladě

$$\lim_{x \to a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\left(x^x - a^x\right) + \left(a^x - a^a\right)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^x - a^x}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{a^x - a^a}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x^x - a^x}{x - a} + a^a \ln a$$

Jsme-li na rozpacích, jak vypočítat limitu, použijeme osvědčený postup – vyjádřeme všechny mocniny prostřednictvím mocnin čísla e.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^x - a^x}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{e^{x \ln x} - e^{x \ln a}}{x - a} = \lim_{x \to a} e^{x \ln a}\, \frac{e^{x(\ln x - \ln a)} - 1}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} e^{x \ln a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{e^{x(\ln x - \ln a)} - 1}{x\left(\ln x - \ln a\right)} \cdot \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \cdot x =$$

$$= e^{a \ln a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{e^{x(\ln x - \ln a)} - 1}{x\left(\ln x - \ln a\right)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} x = a^a \cdot 1 \cdot \frac{1}{a} \cdot a = a^a$$

Celkem potom dostáváme

$$\lim_{x \to a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a + a^a \ln a = \underline{a^a (\ln a + 1)}.$$

1.2.92 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$, $a \rangle 0$

Řešení:

de bychom si měli v první řadě povšimnout, že v čitateli je možno vytknout a^x . Dále se pak budeme snažit dostat

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} = \lim_{h \to 0} \left[a^x \frac{a^h + a^{-h} - 2}{h^2} \right] = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h + \frac{1}{a^h} - 2}{h^2} =$$

$$= a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^{2h} - 2a^h + 1}{a^h h^2} = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{a^h} \cdot \frac{(a^h - 1)^2}{h^2} \right] = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{a^h} \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \right)^2 =$$

$$= a^x \cdot \frac{1}{1} \cdot (\ln a)^2 = \underline{a^x \ln^2 a}.$$

1.2.93 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$, $\alpha \neq \beta$

Řešení č.1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{\alpha x} - 1) + (1 - e^{\beta x})}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} - \beta \frac{e^{\beta x} - 1}{\beta x}}{\alpha \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} - \beta \frac{\sin \beta x}{\beta x}} =$$

$$= \frac{\alpha \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} - \beta \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\beta x} - 1}{\beta x}}{\alpha \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} - \beta \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha \cdot 1 - \beta \cdot 1}{\alpha \cdot 1 - \beta \cdot 1} = \underline{1}$$

Řešení č.2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = \lim_{x \to 0} e^{\beta x} \frac{e^{(\alpha - \beta)x} - 1}{2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} x \right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2} x \right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\beta x} \cdot \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x\right)} \cdot \frac{\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}}{\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}x\right)}{\frac{\alpha-\beta}{2}x}} \right] =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x\right)} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}x\right)}{\frac{\alpha-\beta}{2}x}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \underline{1}.$$

1.2.94 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(x^2 + e^x\right)}{\ln\left(x^4 + e^{2x}\right)}$

__Řešení:__

Rádi bychom jistě viděli výrazy tvaru $\ln(1+\otimes)$. Provedeme proto následující úpravu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left[1+\left(x^2+e^x-1\right)\right]}{\ln\left[1+\left(x^4+e^{2x}-1\right)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\frac{\ln\left[1+\left(x^2+e^x-1\right)\right]}{x^2+e^x-1}}{\frac{\ln\left[1+\left(x^4+e^{2x}-1\right)\right]}{x^4+e^{2x}-1}} \cdot \frac{x^2+e^x-1}{x^4+e^{2x}-1} \right] = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left[1+\left(x^2+e^x-1\right)\right]}{x^2+e^x-1}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left[1+\left(x^4+e^{2x}-1\right)\right]}{x^4+e^{2x}-1}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2+e^x-1}{x^4+e^{2x}-1}$$

K výpočtu limit v čitateli a jmenovateli musíme požít větu o limitě složené funkce. Vezmeme vnitřní funkci $g(x) = x^2 + e^x - 1$ a vnější funkci $f(y) = \dfrac{\ln(1+y)}{y}$. Máme

$\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 + e^x - 1\right) = 0$, $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ a tudíž pro složenou funkci

$f(g(x)) = \dfrac{\ln\left[1+\left(x^2+e^x-1\right)\right]}{x^2+e^x-1}$ máme $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{\ln\left[1+\left(x^2+e^x-1\right)\right]}{x^2+e^x-1} =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = \underline{1}.$

Právě vypočtenou limitu však ještě neopustíme. Věta o limitě složené funkce má totiž ještě jeden předpoklad, který jsme dosud zcela opomíjeli, a to proto, že jeho ověření v dosud probíraných příkladech bylo velmi snadné. Aby naše již uvedené použití věty o limitě složené funkce bylo oprávněné, musíme ukázat, že existuje redukované okolí $\bigcup_{\delta}^{\otimes}(0)$ bodu 0, takové, že $\forall x \in \bigcup_{\delta}^{\otimes}(0)$ je $x^2 + e^x - 1 \neq 0$. Zde je nejschůdnější následující postup. Pro funkci

$g(x) = x^2 + e^x - 1$ platí $g(0) = 0$. Derivace funkce g v bodě je rovna $g'(0) = 1$. Funkce $g(x)$
je tedy v bodě 0 rostoucí. Tzn., že existuje levé redukované okolí bodu 0, na němž je $g(x) \langle\, g(0)$ a rovněž pravé redukované okolí bodu 0, na němž je $g(x) \rangle\, g(0) = 0$. Odtud je existence okolí $\bigcup_{\delta}^{\otimes}(0)$ s požadovanými vlastnostmi zřejmá. Limitu ve jmenovateli vypočteme zcela stejným způsobem a vychází rovněž 1. Zbývá tedy určit

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + e^x - 1}{x^4 + e^{2x} - 1}$$

Zde se opět budeme snažit získat výrazy tvaru $\dfrac{e^x - 1}{x}$ a výrazy jim podobné.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + e^x - 1}{x^4 + e^{2x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x\cdot \dfrac{e^x - 1}{x}}{x^4 + 2x\cdot \dfrac{e^{2x} - 1}{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \dfrac{e^x - 1}{x}}{x^3 + 2\dfrac{e^{2x} - 1}{2x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} x^3 + 2\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x}} = \frac{0+1}{0+2\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Celkově nám tedy vychází

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x^2 + e^x\right)}{\ln\left(x^4 + e^{2x}\right)} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

1.2.95 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(x^2 + e^x\right)}{\ln\left(x^4 + e^{2x}\right)}$

__Řešení:__

Funkce je zde úplně stejná jako v předchozím příkladě, rozdíl je však v tom, že máme určit limitu v ∞ a nikoliv v bodě 0. Opět se budeme snažit dostat výrazy $\dfrac{\ln(1+\otimes)}{\otimes}$, kde $\otimes \to 0$ když $x \to \infty$. Zde je potřeba si uvědomit, že funkce e^x roste do ∞ rychleji než libovolná mocnina x. Přesněji to v našem případě znamená, že $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x^2 + e^x\right)}{\ln\left(x^4 + e^{2x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left[e^x\left(1 + \dfrac{x^2}{e^x}\right)\right]}{\ln\left[e^{2x}\left(1 + \dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)\right]} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{e^x}\right)}{2x + \ln\left(1 + \dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x + \dfrac{x^2}{e^x}\cdot\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{\dfrac{x^2}{e^x}}}{2x + \dfrac{x^4}{e^{2x}}\cdot\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)}{\dfrac{x^4}{e^{2x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \dfrac{x}{e^x}\cdot\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{\dfrac{x^2}{e^x}}}{2 + \dfrac{x^3}{e^{2x}}\cdot\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)}{\dfrac{x^4}{e^{2x}}}} =$$

$$= \frac{1 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{\dfrac{x^2}{e^x}}}{2 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)}{\dfrac{x^4}{e^{2x}}}} = \frac{1+0\cdot 1}{2+0\cdot 1} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Závěrečnou část předchozího výpočtu lze však trochu zjednodušit.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{2x + \ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{x}}{2 + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)}{x}} = \frac{1 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{x}}{2 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)}{x}} =$$

$$= \frac{1 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{2 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)} = \frac{1+0\cdot 1}{2+0\cdot 1} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

1.2.96 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}$

Řešení:

Kdybychom počítali limitu této funkce v ∞, postupovali bychom stejně jako v předchozím příkladě. Výpočet by byl jen trochu jednodušší. V případě $\lim\limits_{x\to-\infty}$ je však situace jiná. Především si musíme uvědomit, že $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x\cdot\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{3^x}}{2^x\cdot\dfrac{\ln\left(1+2^x\right)}{2^x}}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\frac{\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{3^x}}{\dfrac{\ln\left(1+2^x\right)}{2^x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{3^x}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+2^x\right)}{2^x}}=0\cdot\frac{1}{1}=\underline{0}.$$

1.2.97 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$

__Řešení:__

Neměli bychom váhat a opět bychom se měli snažit vytvářet výrazy typu $\dfrac{\ln\left(1+\otimes\right)}{\otimes}$, kde $\otimes\to 0$ pro $x\to\infty$. Začneme např. takto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[\sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)\right]}{\ln\left[\sqrt[3]{x}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)\right]}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2}\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}{\dfrac{1}{3}\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[12]{x}}\right)}$$

Zde bychom si ale měli všimnout, že např. vytvoření výrazu $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}}$ v čitateli (a podobného ve jmenovateli) celkový výraz dosti komplikuje a hlavně neukazuje žádnou rozumnou cestu k cíli. Lépe je upravit poslední limitu takto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[12]{x}}\right)}=\frac{\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\ln x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}{\dfrac{1}{3}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\ln x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[12]{x}}\right)}=\frac{\dfrac{1}{2}+0\cdot 0}{\dfrac{1}{3}+0\cdot 0}=\underline{\frac{3}{2}}.$$

1.2.98 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln\left(x+1\right)-\ln x\right]$

__Řešení:__

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\ln\left(x+1\right)-\ln x\right]=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\underline{1}.$$

1.2.99 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$, $x \rangle 0$.

<u>*Řešení:*</u>
Vyskytuje-li se v limitované funkci jiný logaritmus než přirozený, je nejlepší tento logaritmus vyjádřit pomocí logaritmu přirozeného. Pro dekadický logaritmus log, jak známo, platí $\log a = \log e \cdot \ln a$. S použitím tohoto vztahu dostáváme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\log e\cdot\ln(x+h)+\log e\cdot\ln(x-h)-2\log e\cdot\ln x}{h^2} =$$

$$= \log e\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2} = \log e\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\ln[(x+h)(x-h)]-2\ln x}{h^2} =$$

$$= \log e\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x^2-h^2)-2\ln x^2}{h^2} = \log e\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\ln\frac{x^2-h^2}{x^2}}{h^2} =$$

$$= \log e\cdot \lim_{h\to 0} \left[\frac{\ln\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)}{-\frac{h^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right] = -\frac{\log e}{x^2}\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)}{-\frac{h^2}{x^2}} = -\frac{\log e}{x^2}\cdot 1 = \underline{-\frac{\log e}{x^2}}.$$

1.2.100 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

<u>*Řešení:*</u>
Idea výpočtu je stejná jako u předchozích příkladů tohoto typu. Jenom technické provedení je trochu složitější.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left[1+\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+xe^x)}{xe^x}}{\frac{\ln\left[1+\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\right]}{x+\sqrt{1+x^2}-1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{xe^x}{x+\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+xe^x)}{xe^x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left[1+\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\right]}{x+\sqrt{1+x^2}-1}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{x+\sqrt{1+x^2}-1} =$$

$$= \frac{1}{1}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{x+\sqrt{1+x^2}-1}.$$

Poslední limitu upravíme za pomoci vztahu $A^2-B^2=(A-B)\cdot(A+B)$. Zde je ovšem z technických důvodů vhodné osamostatnit odmocninu. Položíme proto $A=\sqrt{x^2+1}$, $B=1-x$ a zlomek rozšíříme výrazem A + B. Dostáváme tak

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^x}{x+\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^x\left[\sqrt{1+x^2}+(1-x)\right]}{\left[\sqrt{1+x^2}-(1-x)\right]\left[\sqrt{1+x^2}+(1-x)\right]}=\lim_{x\to 0}e^x\left[\sqrt{1+x^2}+(1-x)\right]\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2-(1-x)^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=2\cdot\frac{1}{2}=\underline{1}.$$

1.2.101 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x\right]$

Řešení:

Příklad nevypadá na první pohled příliš průhledně. Dvojka u prostředního členu nám však signalizuje možnost následující úpravy:

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\ln(x+2)-(x+1)\ln(x+1)\right]+\lim_{x\to\infty}\left[x\ln x-(x+1)\ln(x+1)\right].$$

Je-li tato úprava v pořádku – to ovšem závisí na tom, zda vůbec existují poslední dvě limity, a přirozeně na tom, čemu jsou rovny. Podívejme se na poslední z nich, protože je jednodušší než ta první. Vyskytuje-li se někde rozdíl logaritmů, bývá výhodné zapsat ho jako logaritmus podílu. U naší poslední limity to bohužel nejde, protože oba logaritmy jsou ještě něčím násobeny. Ale použijeme-li metodu vhodného přičtení a odečtení, nakonec se nám to přece podaří.

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\ln x-(x+1)\ln(x+1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x\ln x-x\ln(x+1)\right)+\left(x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x+1)\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[-x\ln\frac{x+1}{x}-\ln(x+1)\right].$$

Teď, ale není těžké vidět, že jsme patrně v koncích. Snadno totiž vidíme, že

$$\lim_{x\to\infty}\left(-x\ln\frac{x+1}{x}\right)=-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\ln(x+1)\right]=-\infty$$

takže $\lim\limits_{x\to\infty}\left[-x\ln\frac{x+1}{x}-\ln(x+1)\right]=-\infty$, což nevěští nic dobrého. Všechno nám ale zkazil člen $-\ln(x+1)$. My jsme ale hned na začátku limitovanou funkci napsali jako součet dvou funkcí. U druhé se nám objevil právě zmíněný člen $-\ln(x+1)$. Neobjevil by se nám u první funkce člen $\ln(x+1)$ a nezrušily by se oba? Zkusme to.

$$(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x=\left[(x+2)\ln(x+2)-(x+1)\ln(x+1)\right]+$$

$$+\left[x\ln x-(x+1)\ln(x+1)\right]=$$

$$=\left[\left((x+2)\ln(x+2)-(x+2)\ln(x+1)\right)+\left((x+2)\ln(x+1)-(x+1)\ln(x+1)\right)\right]+$$

$$+\left[\left(x\ln x-x\ln(x+1)\right)+\left(x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x+1)\right)\right]=$$

$$=\left[(x+2)\ln\frac{x+2}{x+1}+\ln(x+1)\right]+\left[-x\cdot\ln\frac{x+1}{x}-\ln(x+1)\right]=(x+2)\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)-$$

$$-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x+1}}-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Vidíme tedy, že naše první metoda – použití věty o limitě součtu – nebyla vhodná, ale přesto nás alespoň přivedla na správný nápad. Jak jsme právě viděli, oba nepříjemné členy se zrušily. Nyní už snadno dostáváme

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x+1}}-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x+1}}-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=1\cdot 1-1=\underline{0}.$$

1.2.102 $\lim\limits_{x\to 0+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right],\quad a\rangle 1$

<u>*Řešení:*</u>

Tento příklad vypadá dosti obtížně. Ale není pravda, že nejobtížněji vypadající limity se vždy nejhůře počítají. Nevíme-li, jak začít, bude asi nejlepší začít zkoumat jednotlivé členy limitované funkce. Máme

$$\lim_{x\to 0+}\ln(x\ln a)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a}=\lim_{x\to 0+}\frac{1+\frac{\ln a}{\ln x}}{1-\frac{\ln a}{\ln x}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln a}{\ln x}}{1-\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln a}{\ln x}}=\frac{1+\ln a\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}}{1-\ln a\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}}=$$

$$=\frac{1+\ln a\cdot 0}{1-\ln a\cdot 0}=\underline{1}.$$

První limita nám vyšla nevlastní. tato informace nám tedy asi nebude užitečná. Druhá limita vychází 1. Jinými slovy limita zlomku $\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}$, který je argumentem logaritmu, je 1. Takovou příležitost bychom neměli propást. Vždyť přece můžeme napsat $\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} = 1 + \left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} - 1\right)$,

přičemž $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} - 1\right) = 0$. A právě tento obrat nám otvírá cestu k výpočtu zadané limity.

$$\lim_{x\to 0+} \ln\left[(x\ln a)\cdot\left(\ln\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right] = \lim_{x\to 0+}\left[\ln(x\ln a)\cdot \ln\left[1+\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} - 1\right)\right]\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left[(\ln(x\ln a))\cdot\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} - 1\right)\cdot\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} - 1\right)\right]}{\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} - 1}\right] = \lim_{x\to 0+}\left[(\ln(x\ln a))\cdot\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} - 1\right)\right]$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} - 1\right)\right]}{\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} - 1} = \lim_{x\to 0+}\left[(\ln(x\ln a))\cdot\frac{\ln a\,x - \ln\frac{x}{a}}{\ln\frac{x}{a}}\right]\cdot 1 =$$

.

.

$$= \lim_{x\to 0+}\left[(\ln x + \ln\ln a)\cdot\frac{\ln a\ + \ln x - \ln x + \ln a}{\ln x - \ln a}\right] = \lim_{x\to 0+}\left[\frac{\ln x + \ln\ln a}{\ln x - \ln a}\cdot 2\ln a\right] =$$

$$= \ln a^2\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{1+\frac{\ln\ln a}{\ln x}}{1-\frac{\ln a}{\ln x}} = \ln a^2\cdot\frac{1+\ln\ln a\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}}{1-\ln a\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}} = \ln a^2\cdot\frac{1+\ln\ln a\cdot 0}{1-\ln a\cdot 0} = \underline{\ln a^2}.$$

1.2.103 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Řešení:

Zde si stačí povšimnout, že

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=1$ a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$ a dále už náš postup může být zcela standardní.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left[1+\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}-1\right)\right]\cdot\ln^{-2}\left[1+\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)\right]\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}-1\right)\right]}{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}-1}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}-1}{\ln\left[1+\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)\right]}\right)^2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}-1}{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^2}=$$

$$=1\cdot1\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)}{4\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2\cdot2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x-1)^2}{x^2}}{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1^2}{2\cdot2}=\underline{\frac{1}{8}}.$$

1.2.104 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+2^x\right)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]$

__Řešení:__

Toto je poměrně jednoduchý příklad. Povšimneme si, že $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}=0$, takže druhý logaritmus nebude třeba upravovat. Na druhé straně ovšem je $\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\infty$, což není dobré a podle našich zkušeností bude vhodné z argumentu prvního logaritmu 2^x vytknout.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+2^x\right)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(2^x\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right)\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right)\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right)\cdot\frac{3}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right)\cdot\frac{3}{x}\right]\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[3\left(\ln 2+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right)\right]\cdot 1=$$

$$=3\lim_{x\to\infty}\left(\ln 2+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right)=3\lim_{x\to\infty}\ln 2+3\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right)=3\ln 2+$$

$$+\ 3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)=3\ln 2+3\cdot 0\cdot 0=\underline{\ln 8}.$$

1.2.105 $\lim\limits_{x\to 1}\ (1-x)\log_x 2$

Řešení:

S trochu podobným příkladem jsme se již setkali. Opět připomeňme, že logaritmus se základem jiným než je e bývá výhodné vyjádřit pomocí logaritmu přirozeného. Obecně platí $\log_b a=\dfrac{\ln a}{\ln b}$, odkud pro náš případ dostáváme $\log_x 2=\dfrac{\ln 2}{\ln x}$. Můžeme tedy počítat.

$$\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\log_x 2\right]=\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\frac{\ln 2}{\ln x}\right]=-\ln 2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln\left[1+(x-1)\right]}=-\ln 2\cdot 1=\underline{-\ln 2}.$$

1.2.106 $\lim\limits_{x\to\infty}\ \left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]$

Řešení:

Použijeme trigonometrickou formuli $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]=2\lim_{x\to\infty}\left[\cos\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)+\ln x\right)\cdot\sin\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)-\ln x\right)\right]=$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\left[\cos\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x\right)\cdot\sin\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

Funkce $\cos\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x\right)$ je na celém svém definičním oboru omezená a pro funkci

$\sin\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ zřejmě platí $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$. Tedy dostáváme

$\lim\limits_{x\to\infty}\ \left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]=0$.

1.2.107 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}+a\,x\right)}{\sin b\,x}$, $b\neq 0$

Řešení:

Zde si stačí uvědomit, že $tg\left(\dfrac{\pi}{4}+a\cdot 0\right)=1$ a snadno nahlédneme, že postup je zcela standardní.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+a\,x\right)}{\sin b\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+a\,x\right)-1\right)\right]}{\sin b\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+a\,x\right)-1\right)\right]}{tg\left(\frac{\pi}{4}+a\,x\right)-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+a\,x\right)-1}{\sin b\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+a\,x\right)-1\right)\right]}{tg\left(\frac{\pi}{4}+a\,x\right)-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+a\,x\right)-1}{\sin b\,x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin b\,x}\cdot\left(\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\,a\,x}{1-tg\frac{\pi}{4}\,tg\,a\,x}-1\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin b\,x}\cdot\frac{1+tg\,a\,x-1+tg\,a\,x}{1-tg\,a\,x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-tg\,a\,x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{\sin ax}{\cos ax}}{\sin b\,x}=1\cdot 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\cos ax}=$$

$$=2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\dfrac{\sin ax}{ax}}{b\cdot\dfrac{\sin bx}{bx}}=\underline{2\frac{a}{b}}$$

1.2.108 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $b\neq 0$

Řešení:

Zde opět stačí, když si všimneme, že $\cos(a\cdot 0)=\cos(b\cdot 0)=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos ax-1)]}{\ln[1+(\cos bx-1)]}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln[1+(\cos ax-1)]}{\cos ax-1}\cdot\frac{\cos bx-1}{\ln[1+(\cos bx-1)]}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos ax-1)]}{\cos ax-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos bx-1}{\ln[1+(\cos bx-1)]}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}=$$

$$=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^2\dfrac{1-\cos ax}{(ax)^2}}{b^2\dfrac{1-\cos bx}{(bx)^2}}=\underline{\left(\frac{a}{b}\right)^2}.$$

1.2.109 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2\left(\pi\cdot 2^x\right)}{\ln\left[\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)\right]}$

Řešení:

Sympatické zde je, že $\cos\left(\pi\cdot 2^1\right)=1$. Víme tedy, co dělat s logaritmem. Méně se nám už líbí, že $\pi\cdot 2^1 = 2\pi$. Byli bychom raději, kdyby nám po dosazení x = 1 argument u sinu vycházel 0. Ale fakticky to nevadí, neboť $\sin 2\pi = \sin 0$. Technicky to zvládneme tak, že napíšeme $\pi\cdot 2^x = \left(\pi\cdot 2^x - 2\pi\right) + 2\pi$ a použijeme periodicitu funkce sinus.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2\left(\pi\cdot 2^x\right)}{\ln\left[\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)\right]} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sin\left[\left(\pi\cdot 2^x - 2\pi\right)+2\pi\right]\right)^2}{\ln\left[1+\left(\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)-1\right)\right]} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)-1}{\ln\left[1+\left(\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)-1\right)\right]}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\left[\sin 2\pi\left(2^{x-1}-1\right)\right]^2}{\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)-1}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)-1}{\ln\left[1+\left(\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)-1\right)\right]}\cdot\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{\sin 2\pi\left(2^{x-1}-1\right)}{2\pi\left(2^{x-1}-1\right)}\right)^2\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\left(2\pi\left(2^{x-1}-1\right)\right)^2}{\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)-1}\right] = 1\cdot\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin 2\pi\left(2^{x-1}-1\right)}{2\pi\left(2^{x-1}-1\right)}\right)^2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\left(2\pi\left(2^{x-1}-1\right)\right)^2}{\cos\left[\left(\pi\cdot 2^x-2\pi\right)+2\pi\right]-1} =$$

$$= 1^2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\left(2\pi\left(2^{x-1}-1\right)\right)^2}{\cos\left(2\pi\left(2^{x-1}-1\right)\right)-1} = \underline{-2}$$

1.2.110 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin\left(\pi\cdot x^\alpha\right)}{\sin\left(\pi\cdot x^\beta\right)}, \quad \beta\neq 0$

Řešení:

Zde bohužel opět $\pi\cdot 1^\alpha$ a $\pi\cdot 1^\beta$ nejsou rovny 0, nýbrž π , takže zase provedeme nejdříve posun.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\pi\cdot x^\alpha\right)}{\sin\left(\pi\cdot x^\beta\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\left[\left(\pi\cdot x^\alpha-\pi\right)+\pi\right]}{\sin\left[\left(\pi\cdot x^\beta-\pi\right)+\pi\right]} = \lim_{x\to 1}\frac{-\sin\pi\left(x^\alpha-1\right)}{-\sin\pi\left(x^\beta-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\sin\pi\left(x^\alpha-1\right)}{\pi\left(x^\alpha-1\right)}\cdot\frac{\pi\left(x^\beta-1\right)}{\sin\pi\left(x^\beta-1\right)}\cdot\frac{\pi\left(x^\alpha-1\right)}{\pi\left(x^\beta-1\right)}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi\left(x^\alpha-1\right)}{\pi\left(x^\alpha-1\right)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\pi\left(x^\beta-1\right)}{\sin\pi\left(x^\beta-1\right)}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1} = 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{e^{\beta\ln x}-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot\frac{\beta\ln x}{e^{\beta\ln x}-1}\cdot\frac{\alpha\ln x}{\beta\ln x}\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\beta\ln x}{e^{\beta\ln x}-1} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot 1\cdot 1 = \underline{\frac{\alpha}{\beta}}$$

1.2.111 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-1}{\left(e^{x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x\sin x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{e^{x^2}-1}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\underline{\frac{1}{2}}$$

1.2.112 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x\,e^{x}\right)-\cos\left(x\,e^{-x}\right)}{x^3}$

Řešení:

Zde si jistě všimneme, že argumenty kosinů mají v bodě 0 hodnotu 0. Může nás tedy napadnout napsat:

$$\cos\left(x\,e^{x}\right)-\cos\left(x\,e^{-x}\right)=\left[\cos\left(x\,e^{x}\right)-1\right]+\left[1-\cos\left(x\,e^{-x}\right)\right].$$

Snadno ale nahlédneme, že tento postup asi nikam nepovede. První sčítanec by totiž bylo třeba dělit $\left(x\,e^{x}\right)^2$ a my bohužel máme ve jmenovateli příliš vysokou mocninu – totiž x^3. My ale naštěstí známe ještě jinou metodu – můžeme použít příslušnou trigonometrickou formuli.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(x\,e^{x}\right)-\cos\left(x\,e^{-x}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{x^3}\left[\sin\left(x\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\cdot\sin\left(x\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\right]=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(x\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)}{x\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}\cdot\frac{x\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\left(x\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)}{x\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}\cdot\frac{x\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}{x^2}\right]=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)}{x\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)}{x\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2x}=$$

$$=-2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-1\right)+\left(1-e^{-x}\right)}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=$$

$$=-1-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=-1-1=\underline{-2}.$$

1.2.113 $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$

<u>*Řešení:*</u>

Toto je trochu zrádný příklad. V čitateli vidíme rozdíl dvou odmocnin, takže nás asi napadne rozšířit celý zlomek jejich součtem. Avšak $\sqrt{1-e^{-0}}-\sqrt{1-\cos 0}=0$, ve jmenovateli se objevuje také 0. Víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$ a napíšeme-li $\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\sqrt{x}}$, dostáváme výraz, který vypadá docela přijatelně. Můžeme tedy zkusit napsat

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\sqrt{\sin x}} - \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$$

Musíme ovšem pečlivě prozkoumat obě limity vpravo.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0+}\left[\frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\right] = \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{1-e^{-x}}{x}}\cdot\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{x}{\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x}-1}{-x}}\cdot\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1\cdot 1 = 1$$

K určení posledních dvou limit je nutno použít jednostrannou verzi věty o limitě složené funkce.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0+}\left[\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\cdot\sqrt{x}\right] = \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}\cdot\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{x}{\sin x}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0+}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot 0 = 0$$

Celkem tedy vychází

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = 1-0 = \underline{1}.$$

1.2.114 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sh\, x}{x}$

<u>*Řešení:*</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{sh\, x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)+\left(1-e^{-x}\right)}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} +$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1 = \underline{1}.$$

1.2.115 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ch\,x-1}{x^2}$

<u>*Řešení:*</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{ch\,x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{sh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\underline{\frac{1}{2}}$$

1.2.116 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{th\,x}{x}$

<u>*Řešení:*</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{th\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sh\,x}{ch\,x}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sh\,x}{x}\cdot\frac{1}{ch\,x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{sh\,x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{ch\,x}=1\cdot 1=\underline{1}$$

1.2.117 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sh^2\,x}{\ln(ch\,3x)}$

<u>*Řešení:*</u>

Zde si jenom uvědomíme, že ch(3.0) = 1 a vidíme, že lze použít zcela standardní postup.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sh^2\,x}{\ln(ch\,3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sh^2\,x}{\ln[1+(ch\,3x-1)]}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{sh^2\,x}{x^2}\cdot\frac{ch\,3x-1}{\ln[1+(ch\,3x-1)]}\cdot\frac{x^2}{ch\,3x-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sh^2\,x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ch\,3x-1}{\ln[1+(ch\,3x-1)]}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{9}\cdot\frac{(3x)^2}{ch\,3x-1}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{ch\,3x-1}=\frac{1}{9}\cdot 2=\underline{\frac{2}{9}}.$$

1.2.118 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{sh\,x-sh\,a}{x-a},\quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{ch\,x-ch\,a}{x-a}$

<u>*Řešení:*</u>

Můžeme postupovat buďto jako u trigonometrických funkcí. Ukážeme to na první z obou limit

$$\lim_{x\to a}\frac{sh\,x-sh\,a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\,sh\frac{x-a}{2}\,ch\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{sh\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}ch\frac{x+a}{2}=1\cdot ch\,a=\underline{ch\,a}.$$

Jiná možnost je prostě použít definice hyperbolických funkcí. To zase pro změnu ukážeme na druhé limitě.

$$\lim_{x\to a}\frac{ch\,x-ch\,a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^a+e^{-a}}{2}}{x-a}=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{\left(e^x-e^a\right)+\left(e^{-x}-e^{-a}\right)}{x-a}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}+\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{e^{-x}-e^{-a}}{x-a}=\frac{1}{2}e^a\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}+\frac{1}{2}e^{-a}\lim_{x\to a}\frac{e^{-x+a}-1}{x-a}=$$

$$=\frac{1}{2}e^a\cdot 1-\frac{1}{2}e^{-a}\lim_{x\to a}\frac{e^{-(x-a)}-1}{-(x-a)}=\frac{1}{2}e^a-\frac{1}{2}e^{-a}\cdot 1=\underline{sh\,a}.$$